Karlsruhe Institute of Technology (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Dipl.-Math.techn. Rainer Mandel

4. Übungsblatt zum Schnupperkurs

Aufgabe 1: Grenzwerte

1. Zeigen Sie $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^3} = 0$.
2. Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} \frac{2+5t+3t^2}{1+2t^2}$.
3. Zeigen Sie: Ist eine Folge (X_t) konvergent, dann ist sie beschränkt.

Aufgabe 2: Bernoullische Ungleichung und Anwendung

1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Bernoullische Ungleichung
$$(1+x)^t \geq 1 + tx \qquad \text{für alle } x > -1$$
2. Sei $\kappa \in (0,1)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung $\lim_{t\to\infty} \kappa^t = 0$.
Zur Erinnerung: $\lim_{t\to\infty} \kappa^t = 0$ genau dann wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $t_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $t \geq t_0$ die Ungleichung $|\kappa^t - 0| < \varepsilon$ gilt.
3. Zeigen Sie mit Hilfe von 2.: Falls $Y_{t+1} \leq \kappa Y_t$ für ein $\kappa < 1$ und $Y_t > 0$ für alle $t \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_{t\to\infty} Y_t = 0$.

Aufgabe 3: Beweis von Proposition 4.3

In dieser Aufgabe beweisen wir Proposition 4.3 auf eine andere Art und Weise. Zur Erinnerung die Aussage der Proposition:

Seien $a > c > 0, b > 0$, sei Z_t gegeben durch

$$Z_{t+1} = \frac{aZ_t}{c + bZ_t}, \qquad Z_0 > 0.$$

Dann gilt $\lim_{t\to\infty} Z_t = \frac{a-c}{b}$.

1. Berechnen Sie im Fall $c = 1$ die ersten 4 Folgenglieder in Abhängigkeit von Z_0. Stellen Sie eine Lösungsformel für Z_t auf.
2. Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.
3. Finden Sie die Lösungsformel für allgemeines $c > 0$, indem Sie diesen Fall auf den Fall $c = 1$ (und damit auf 2.) zurückführen.
4. Zeigen Sie $\lim_{t\to\infty} Z_t = \frac{a-c}{b}$.