Karlsruhe Institute of Technology (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Dipl.-Math.techn. Rainer Mandel

4. Übungsblatt zum Schnupperkurs

Aufgabe 1: Grenzwerte

1. Zeigen Sie $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^3} = 0$.
2. Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} \frac{2+5t+3t^2}{1+2t^2}$.
3. Zeigen Sie: Ist eine Folge (X_t) konvergent, dann ist sie beschränkt.

Musterlösung:

1. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine natürliche Zahl $t_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $t_0 > \varepsilon^{-1/3}$. Für $t \geq t_0$ gilt dann
$$|\frac{1}{t^3} - 0| = \frac{1}{t^3} \leq \frac{1}{t_0^3} < \frac{1}{(\varepsilon^{-1/3})^3} = \varepsilon.$$
Das ist alles, was nach Definition des Grenzwertes zu zeigen ist.

2. Wir zeigen: $\lim_{t\to\infty} \frac{2+5t+3t^2}{1+2t^2} = \frac{3}{2}$. Es gilt die Ungleichung
$$\begin{aligned} |\frac{2+5t+3t^2}{1+2t^2} - \frac{3}{2}| &= \frac{1+10t}{2+4t^2} \\ &\leq \frac{5+10t}{2+4t^2} \\ &= \frac{5}{2t} \qquad (*). \end{aligned}$$
Für ein bebliebiges $\varepsilon > 0$ wähle $t_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $t_0 > \frac{2}{5\varepsilon}$. Dann gilt wegen $(*)$ für $t \geq t_0$:
$$|\frac{2+5t+3t^2}{1+2t^2} - \frac{3}{2}| \leq \frac{5}{2t} \leq \frac{5}{2t_0} < \varepsilon.$$

3. Sei (X_t) konvergent mit Grenzwert x. Dann gibt es per Definition des Grenzwerts $(\varepsilon = 1)$ ein $t_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $|X_t - x| \leq 1$ für alle $t \geq t_0$. Insbesondere
$$|X_t| = |X_t - x + x| \leq |X_t - x| + |x| \leq 1 + |x| \qquad (t \geq t_0).$$
Wir erhalten für alle $t \in \mathbb{N}_0$:
$$|X_t| \leq \max\{|X_0|, |X_1|, \ldots, |X_{t_0-1}|, 1 + |x|\}.$$

Aufgabe 2: Bernoullische Ungleichung und Anwendung

1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Bernoullische Ungleichung
$$(1+x)^t \geq 1+tx \qquad \text{für alle } x > -1$$
2. Sei $\kappa \in (0,1)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung $\lim_{t\to\infty} \kappa^t = 0$.
Zur Erinnerung: $\lim_{t\to\infty} \kappa^t = 0$ genau dann wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $t_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $t \geq t_0$ die Ungleichung $|\kappa^t - 0| < \varepsilon$ gilt.
3. Zeigen Sie mit Hilfe von 2.: Falls $Y_{t+1} \leq \kappa Y_t$ für ein $\kappa < 1$ und $Y_t > 0$ für alle $t \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_{t\to\infty} Y_t = 0$.

Musterlösung:

1. *Induktionsanfang* $t = 0$: Es gilt "rechte Seite" = "linke Seite" = 1.
Induktionsschritt: Es gelte die Behauptung für ein $t \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $x > -1$
$$\begin{aligned}(1+x)^{t+1} &= \underbrace{(1+x)^t}_{\geq 1+tx} \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0} \\ &\geq (1+tx)(1+x) \\ &= 1+x+tx+tx^2 \\ &\geq 1+(t+1)x.\end{aligned}$$

2. Sei $x := \frac{1}{\kappa} - 1 > 0$. Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt
$$\kappa^t = \Big(\frac{1}{1+x}\Big)^t = \frac{1}{(1+x)^t} \leq \frac{1}{1+tx} = \frac{\kappa}{\kappa + t(1-\kappa)}$$
Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ wähle daher ein $t_0 \in \mathbb{N}$ mit $t_0 > \frac{\kappa}{1-\kappa}(\varepsilon^{-1} - 1)$. Dann gilt für $t \geq t_0$
$$\begin{aligned}\kappa^t &\leq \frac{\kappa}{\kappa + t(1-\kappa)} \\ &\leq \frac{\kappa}{\kappa + t_0(1-\kappa)} \\ &< \frac{\kappa}{\kappa + \kappa(\varepsilon^{-1} - 1)} \\ &= \frac{\kappa}{\kappa\varepsilon^{-1}} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

3. Vollständige Induktion zeigt: $0 < Y_t \leq \kappa^t Y_0$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$. Daraus folgt dann $\lim_{t\to\infty} Y_t = 0$.

Aufgabe 3: Beweis von Proposition 4.3

In dieser Aufgabe beweisen wir Proposition 4.3 auf eine andere Art und Weise. Zur Erinnerung die Aussage der Proposition:

Seien $a > c > 0, b > 0$, *sei* Z_t *gegeben durch*

$$Z_{t+1} = \frac{aZ_t}{c + bZ_t}, \qquad Z_0 > 0.$$

Dann gilt $\lim_{t\to\infty} Z_t = \frac{a-c}{b}$.

1. Berechnen Sie im Fall $c = 1$ die ersten 4 Folgenglieder in Abhängigkeit von Z_0. Stellen Sie eine Lösungsformel für Z_t auf.
2. Beweisen Sie diese Formel mit vollständiger Induktion.
3. Finden Sie die Lösungsformel für allgemeines $c > 0$, indem Sie diesen Fall auf den Fall $c = 1$ (und damit auf 2.) zurückführen.
4. Zeigen Sie $\lim_{t\to\infty} Z_t = \frac{a-c}{b}$.

Musterlösung:

1. Sei $c = 1$. Dann

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{aZ_0}{1 + bZ_0} \\
Z_2 &= \frac{aZ_1}{1 + bZ_1} = \frac{a^2 Z_0}{1 + b(1 + a)Z_0} \\
Z_3 &= \frac{aZ_2}{1 + bZ_2} = \frac{a^3 Z_0}{1 + b(1 + a + a^2)Z_0} \\
Z_4 &= \frac{aZ_3}{1 + bZ_3} = \frac{a^4 Z_0}{1 + b(1 + a + a^2 + a^3)Z_0}
\end{aligned}$$

   Die Lösungsformel lautet daher

$$Z_t = \frac{a^t Z_0}{1 + b(1 + a + \ldots + a^{t-1})Z_0}$$

2. *Induktionsanfang* $t = 0$*:* rechts und links steht Z_0.

Induktionsschritt: Es gelte die Formel für ein $t \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$\begin{aligned} Z_{t+1} &= \frac{aZ_t}{1+bZ_t} \\ &= \frac{a \cdot \frac{a^t Z_0}{1+b(1+a+\ldots+a^{t-1})Z_0}}{1+b \cdot \frac{a^t Z_0}{1+b(1+a+\ldots+a^{t-1})Z_0}} \\ &= \frac{a^{t+1}Z_0}{1+b(1+a+\ldots+a^{t-1})Z_0 + ba^t Z_0} \\ &= \frac{a^{t+1}Z_0}{1+b(1+a+\ldots+a^{t-1}+a^t)Z_0}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis erbracht.
Die Formel lässt sich auch schreiben als (siehe erste Vorlesung):

$$Z_t = \frac{a^t Z_0}{1+b(\sum_{i=0}^{t-1} a^i)Z_0} = \frac{a^t Z_0}{1+b\frac{1-a^t}{1-a}Z_0} = \ldots = \frac{(a-1)Z_0}{(a^{-1})^t(a-1)+b(1-(a^{-1})^t)Z_0}.$$

3. Im Fall $c \neq 1$ gilt
$$Z_{t+1} = \frac{aZ_t}{c+bZ_t} = \frac{\frac{a}{c}Z_t}{1+\frac{b}{c}Z_t}.$$
Nach 2. lautet die Lösungsformel daher
$$Z_t = \frac{(\frac{a}{c}-1)Z_0}{(\frac{c}{a})^t(\frac{a}{c}-1)+\frac{b}{c}(1-(\frac{c}{a})^t)Z_0} = \frac{(a-c)Z_0}{(\frac{c}{a})^t(a-c)+b(1-(\frac{c}{a})^t)Z_0}.$$

4. Es gilt wegen $\frac{c}{a} < 1$
$$\lim_{t\to\infty}\left((\frac{c}{a})^t(a-c)+b(1-(\frac{c}{a})^t)Z_0\right) = (a-c)\cdot 0 + b(1-0)Z_0 = bZ_0$$
Demnach
$$\lim_{t\to\infty} Z_t = \lim_{t\to\infty}\frac{(a-c)Z_0}{(\frac{c}{a})^t(a-c)+b(1-(\frac{c}{a})^t)Z_0} = \frac{(a-c)Z_0}{bZ_0} = \frac{a-c}{b}.$$