Karlsruhe Institute of Technology (KIT) SS 2011
Institut für Analysis
Dipl.-Math.techn. Rainer Mandel

5. Übungsblatt zum Schnupperkurs

Aufgabe 1: logistische Gleichung für $\lambda = 2$

Bestimmen Sie eine Lösungsformel der logistischen Gleichung $X_{t+1} = \lambda X_t(1 - X_t)$ im Falle $\lambda = 2$.

Hinweis: Betrachten Sie $2X_t - 1$.

Musterlösung:

Sei $Y_t := 2X_t - 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Y_{t+1} &= 2X_{t+1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2X_t(1 - X_t) - 1 \\ &= 2X_t(2 - 2X_t) - 1 \\ &= (Y_t + 1)(1 - Y_t) - 1 \\ &= Y_t^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich durch einen Induktionsbeweis $Y_t = Y_0^{2^t}$ und wir erhalten Formel

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Y_t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Y_0^{2^t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2X_0 - 1)^{2^t}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Eine quadratische Normalform

Zeigen Sie, dass jede quadratische Rekursion ($a \neq 0$)

$$X_{t+1} = aX_t^2 + bX_t + c$$

durch eine lineare Transformation $Y_t = \alpha X_t + \beta$ auf eine Rekursion der Form

$$Y_{t+1} = Y_t^2 + d$$

zurückgeführt werden kann. Bestimmen Sie d, α, β in Abhängigkeit von a, b, c.

Musterlösung:

Sei $Y_t = \alpha X_t + \beta$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
Y_{t+1} &= \alpha X_{t+1} + \beta \\
&= \alpha \cdot (aX_t^2 + bX_t + c) + \beta \\
&= \alpha a \cdot X_t^2 + \alpha b \cdot X_t + \alpha c + \beta \\
&= \alpha a \cdot \Big(\frac{Y_t - \beta}{\alpha}\Big)^2 + \alpha b \cdot \frac{Y_t - \beta}{\alpha} + \alpha c + \beta \\
&= \frac{a}{\alpha} \cdot Y_t^2 + (b - \frac{2a\beta}{\alpha}) \cdot Y_t + \big(\frac{a\beta^2}{\alpha} - b\beta + \alpha c + \beta\big).
\end{aligned}$$

Soll die Rekursion der genannten Form sein, so muss gelten

$$\begin{array}{llll}
\text{i)} & \dfrac{a}{\alpha} = 1 & \Longrightarrow & \alpha = a \\
\text{ii)} & b - \dfrac{2a\beta}{\alpha} = 0 & \Longrightarrow & \beta = \dfrac{b}{2}.
\end{array}$$

Mit diesen Definitionen folgt

$$\begin{aligned}
Y_{t+1} &= Y_t^2 + \big(\frac{a \cdot (\frac{b}{2})^2}{a} - b \cdot \frac{b}{2} + ac + \frac{b}{2}\big) \\
&= Y_t^2 + \big(-\frac{b^2}{4} + \frac{b}{2} + ac\big)
\end{aligned}$$

und somit

$$\alpha = a, \qquad \beta = \frac{b}{2}, \qquad d = -\frac{b^2}{4} + \frac{b}{2} + ac.$$