Analysis 1-Kurzskript

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Wintersemester 2008/2009

– In LaTeX gesetzt von Norman Weik –

Dieses Skript enthält alle Sätze, Hilfssätze, Definitionen und Aussagen der Vorlesung. Beweise, Rechnungen sowie Kommentare und Erläuterungen, die in der Vorlesung dargestellt wurden, werden hier nicht wiedergegeben.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen, Funktionen, reelle Zahlen

1.1 Mengen

Eine Menge ist eine Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte (Elemente) zu einem Ganzen.

Schreibweisen

$x \in A$ (Element x gehört zu A)

$x \notin A$ (Element x gehört nicht zu A)

$A \subset B$ (A ist Teilmenge von B, d.h. für jedes $x \in A$ gilt auch $x \in B$)

$\emptyset$ leere Menge, für jede Menge A gilt $\emptyset \subset A$

$A \cup B = \{x : \; x \in A \text{ oder } x \in B\}$ (Vereinigung)

$A \cap B = \{x : \; x \in A \text{ und } x \in B\}$ (Durchschnitt)

$A \setminus B = \{x : \; x \in A \text{ und } x \notin B\}$ (Differenz)

$P(A) = \{M : \; M \subset A\}$ (Potenzmenge von A)

$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ Menge aller geordneten Paare (a,b)

1.2 Funktionen

Definition 1.1 *X, Y seien Mengen. Eine Funktion (Abbildung) f von X nach Y ordnet jedem $x \in X$ eindeutig ein $y \in Y$ zu.*
Schreibweise: $f : \begin{cases} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ *oder* $f : X \to Y$

Merke:

Eine Funktion besteht aus 3 "Objekten"

- X Definitionsmenge
- Y Wertemenge
- $x \mapsto f(x)$ Abbildungsvorschrift

Bezeichnungen

- Sei $A \subset X$. Dann heißt $f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$ Bild von A
- Sei $B \subset Y$. Dann heißt $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ Urbild von B
- $f : X \to Y$ heißt
  - **injektiv**, wenn gilt: aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.
    (alternativ: aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$)
  - **surjektiv**, wenn gilt: $f(X) = Y$
  - **bijektiv**, falls f surjektiv und injektiv ist.

Umkehrfunktion

Sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Die Funktion

$g : \left\{ \begin{array}{ccc} Y & \to & X \\ y & \mapsto & x \quad \text{mit } y = f(x) \end{array} \right.$ heißt Umkehrfunktion von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Komposition

$f : X \to Y$ und $g : W \to Z$ seien Funktionen mit $f(X) \subset W$. Die Funktion

$h : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & Z \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$ heißt Komposition von f und g.

kurz: $h = g \circ f$

Identitätsabbildung

$$id_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$$

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = id_Y$ und $f^{-1} \circ f = id_X$

1.3 Reelle Zahlen

Wir betrachten eine Menge $\mathbb{R}$ (Menge der reellen Zahlen), deren Existenz nicht bewiesen wird, welche 13 Axiomen (A1)-(A13) genügt.

Körperaxiome (A1)-(A9)

Es gibt Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$, die zwei Elementen $a, b \in \mathbb{R}$ ein Element $a + b \in \mathbb{R}$ bzw. $a \cdot b \in \mathbb{R}$ zuordnen mit folgenden Eigenschaften:

(A1)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(Assoziativität)
(A2)	$a + b = b + a$	(Kommutativität)
(A3)	es gibt $0 \in \mathbb{R}$ mit $a + 0 = a$	(neutrales Element bzgl. $+$)
(A4)	zu $a \in \mathbb{R}$ gibt es $(-a) \in \mathbb{R}: \quad a + (-a) = 0$	(Inverses Element bzgl. $+$)
(A5)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(Assoziativität)
(A6)	$a \cdot b = b \cdot a$	(Kommutativität)
(A7)	es gibt $1 \in \mathbb{R}$ mit $a \cdot 1 = a$	(neutrales Element bzgl. $\cdot$)
(A8)	zu $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es $a^{-1} \in \mathbb{R}: \quad a \cdot a^{-1} = 1$	(Inverses Element bzgl. $\cdot$)
(A9)	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	(Distributivität)

Konventionen:

für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $a - b := a + (-b)$

für $a \neq 0$ sei $\frac{b}{a} := a^{-1} \cdot b$

$(a \cdot b) + (a \cdot c) = a \cdot c + b \cdot c$

Anordnungsaxiome (A10)-(A12)

Es existiert eine Teilmenge $P \subset \mathbb{R}$ (die Menge der positiven reellen Zahlen) mit:

(A10)	für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen: $-a \in P$; $a \in P$; $a = 0$
(A11)	$a, b \in P \Rightarrow a + b \in P$
(A12)	$a, b \in P \Rightarrow a \cdot b \in P$

Schreibweise

$a \in P \Leftrightarrow a > 0$

$a - b \in P \Leftrightarrow a > b$ bzw. $b < a$

Konvention

für $a, b \in \mathbb{R}$ bedeutet:

- $a \leq b$, dass entweder $a = b$ oder $a < b$ gilt.
- für $A \subset \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}$ bedeutet:
    - $A \leq \xi$: für alle $a \in A$ gilt $a \leq \xi$

- $A < \xi$: für alle $a \in A$ gilt $a < \xi$
- $\xi \leq A$: für alle $a \in A$ gilt $\xi \leq a$
- $\xi < A$: für alle $a \in A$ gilt $\xi < a$

Definition 1.2 (obere und untere Schranken) *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

*a) ξ heißt **obere Schranke** von A, falls $A \leq \xi$ gilt.*

*b) ξ heißt **untere Schranke** von A, falls $\xi \leq A$ gilt.*

c) A heißt nach oben beschränkt, wenn eine obere Schranke von A existiert.

d) A heißt nach unten beschränkt, wenn eine untere Schranke von A existiert.

e) A heißt beschränkt, falls A nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition 1.3 (Maximum, Minimum) *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

a) $\eta \in \mathbb{R}$ heißt Maximum von A, falls $A \leq \eta$ und $\eta \in A$.

b) $\eta \in \mathbb{R}$ heißt Minimum von A, falls $\eta \leq A$ und $\eta \in A$.

Bezeichnung: $\max A$ bzw. $\min A$

Definition 1.4 (Supremum, Infimum) *Sei $A \subset \mathbb{R}$.*

a) $\eta \in \mathbb{R}$ heißt Supremum (kleinste obere Schranke) von A, falls gilt:

   i) $A \leq \eta$

   ii) aus $A \leq \xi$ folgt $\eta \leq \xi$

b) $\eta \in \mathbb{R}$ heißt Infimum (größte untere Schranke) von A, falls gilt:

   i) $\eta \leq A$

   ii) aus $\xi \leq A$ folgt $\xi \leq \eta$

Bezeichnung: $\sup A$ bzw. $\inf A$

Vollständigkeitsaxiom (A13)

(A13) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum $\sup A \in \mathbb{R}$

Betrag und Dreiecksungleichung

Für $a \in \mathbb{R}$ sei $\mid a \mid = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$

Rechenregeln:

i) $\mid a \mid = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$

ii) $\mid a \cdot b \mid = \mid a \mid \cdot \mid b \mid$

iii) $\dfrac{\mid a \mid}{\mid b \mid} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$, falls $b \neq 0$

iv) $\mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$ (Dreiecksungleichung)

v) $\Big| \mid a \mid - \mid b \mid \Big| \leq \mid a + b \mid$ (Umgekehrte Dreiecksungleichung)

Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

$$\begin{aligned}
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ heisst offenes Intervall} \\
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \text{ heisst abgeschlossenes Intervall} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(-\infty,a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
(-\infty,a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\
(-\infty,\infty) &:= \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^- := (-\infty,0), \quad \mathbb{R}^+ := (0,\infty) \\
B_\epsilon(a) &:= (a-\epsilon, a+\epsilon) \text{ heisst } \epsilon\text{-Umgebung von } a.
\end{aligned}$$

Mengensysteme

Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt Mengensystem, wenn die Elemente von $\mathfrak{M}$ selbst wieder Mengen sind.

Sei $\mathfrak{M}$ ein Mengensystem:

$$\bigcap_{B \in \mathfrak{M}} B := \{x \mid x \in B \text{ für jedes } B \in \mathfrak{M}\}$$

$$\bigcup_{B \in \mathfrak{M}} B := \{x \mid x \in B \text{ für mindestens ein } B \in \mathfrak{M}\}$$

2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

2.1 Natürliche Zahlen

Definition 2.1 *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt induktive Menge, falls gilt:*

a) $1 \in M$

b) $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$

Definition 2.2 *Sei $\mathfrak{M} := \{M \subset \mathbb{R},\ M \text{ ist induktiv}\}$. Dann heißt $\mathbb{N} := \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M$ die Menge der natürlichen Zahlen.*

Lemma 2.3 $\mathbb{N}$ *ist die kleinste induktive Menge.*

Korollar 2.4 *Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine induktive Menge, so ist $M = \mathbb{N}$ (Induktionsprinzip).*

2.2 Beweise durch vollständige Induktion

$A(n)$ sei eine Aussageform mit Wahrheitsgehalt richtig oder falsch in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$. Um zu beweisen, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$ geht man wie folgt vor:

a) Beweise, dass $A(1)$ wahr ist.

b) Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}$, beweise die Wahrheit von $A(n+1)$.

Damit ist $M = \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$ eine induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$, also $M = \mathbb{N}$.

Variante der vollständigen Induktion

a)' Beweise, dass $A(n_0)$ wahr ist für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

b)' Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist für ein $n \in \mathbb{N}$, beweise die Wahrheit von $A(n+1)$.

Damit folgt, dass $A(n)$ wahr ist für alle natürlichen $n \geq n_0$.

Beispiel: Bernoullische Ungleichung (Jacob Bernoulli, 1689)

Für $x > -1,\ n \in \mathbb{N}$ gilt:	$(1+x)^n$	$\geq$	$1 + n \cdot x$
Für $x > -1,\ x \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt:	$(1+x)^n$	$>$	$1 + n \cdot x$

2.3 Beziehung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$

Lemma 2.5 *$\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt.*

Korollar 2.6

(i) Seien $a, b \in (0, \infty)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot a > b$.

(ii) Sei $a \in (0, \infty)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < a < n$.

Lemma 2.7 *Sei $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$. Dann besitzt M ein Minimum.*

2.4 Ganze Zahlen, rationale Zahlen

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q} := \{x = \dfrac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$	Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}$ erfüllt (A1)-(A12), aber nicht (A13).

2.5 Endliche Mengen, abzählbare Mengen

Definition 2.8 *Zwei Mengen heißen gleichmächtig, falls eine bijektive Abbildung $\varphi : A \to B$ existiert.*

Definition 2.9 *Sei A eine Menge.*

a) A heißt endlich, falls $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass A und $\{1, 2, ..., n\}$ gleichmächtig sind. Schreibweise: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} = \{a_k : k = 1, ..., n\}$

b) A heißt unendlich, falls A nicht endlich ist.

c) A heißt abzählbar, falls A und $\mathbb{N}$ gleichmächtig sind. Schreibweise: $A = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$

d) A heißt höchstens abzählbar, falls A endlich oder abzählbar ist. Schreibweise: $A = \{a_k\}$

Satz 2.10

a) *A sei abzählbar, $B \subset A \Rightarrow B$ ist höchstens abzählbar.*

b) *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.*

c) *$\mathfrak{M} = \{A_k\}$ sei eine höchstens abzählbare Menge, wobei jedes Element A_k höchstens abzählbar ist. Dann ist $\bigcup\limits_{A_k \in \mathfrak{M}} A_k$ höchstens abzählbar.*

Korollar 2.11 *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

Proposition 2.12 *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $I_k := [a_k, b_k]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a_k < b_k$ und es gelte $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ d.h. $I_k \supset I_{k+1}$. Dann ist*

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k \neq \emptyset.$$

Eine Menge A heißt überabzählbar, falls A nicht höchstens abzählbar ist.

Satz 2.13 *$\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Bemerkung

Ein ähnlicher Beweis zeigt, dass jedes nichtleere Intervall $I \subset \mathbb{R}$ überabzählbar ist.

2.6 Summen- und Produktzeichen

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + ... + a_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

Eigenschaften

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \mu \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$

b) $a_i \leq b_i$ für $i = 1, ..., n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i$

c) $0 \leq a_i \leq b_i$ für $i = 1, ..., n \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} a_i \leq \prod_{i=1}^{n} b_i$

d) $\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} | a_i |$

2.7 Binomialkoeffizienten

Pascalsches Dreieck

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4: & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

... usw.

Bezeichnung: die Zahlen der n-ten Zeile heißen der Reihe nach $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$

Definition 2.14 *Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} := 1 \quad \textit{sowie} \quad \binom{n+1}{k} := \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \textit{ für } k = 1, \ldots, n.$$

Satz 2.15 (Binomischer Satz) *Seien $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}.$$

Fakultäten

$0! := 1, \quad \underbrace{n!}_{n\text{-Fakultät}} := n \cdot (n-1)! \quad , n \in \mathbb{N}$

Satz 2.16 $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}$

Ergänzung

a) $\binom{n}{k} := 0$, *falls* $n < k$.

b) $\binom{n}{k}$ = *Anzahl der unterschiedlichen* k*-elementigen Teilmengen einer* n*-elementigen Grundmenge.*

3 Polynome und n-te Wurzeln

Definition 3.1 *$f, g: \ D \to \mathbb{R}$ seien Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind:*

$$\lambda \cdot f : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \cdot f(x) \end{cases} \qquad f + g : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{cases} \qquad f \cdot g : \begin{cases} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{cases}$$

ebenfalls Funktionen. Analog definiert man punktweise $\mid f \mid$, $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$.

Definition 3.2 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt*

a) nach oben beschränkt, falls $K \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \leq K \quad \forall x \in D$

b) nach unten beschränkt, falls $K \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) \geq K \quad \forall x \in D$

c) beschränkt, falls $K \in \mathbb{R}$ existiert mit $\mid f(x) \mid \leq \ K \quad \forall x \in D$

Schreibweise

$\sup f(D) =: \sup_D f \ \ (= \sup\limits_{x \in D} f(x))$

$\inf f(D) =: \inf_D f \ \ (= \inf\limits_{x \in D} f(x))$

Ist f nach oben bzw. unten unbeschränkt, so definiere $\sup_D f = \infty$ bzw. $\inf_D f = -\infty$

3.1 Polynome

Definition 3.3 *Ein Polynom ist eine Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$. Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten von P. Falls $a_n \neq 0$, dann heißt P Polynom vom Grad n.*

Eigenschaften

Sind P, Q Polynome, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot P, \ P + Q$ und $P \cdot Q$ sind Polynome.

Satz 3.4 *$P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ sei ein Polynom, $\xi \in \mathbb{R}$ fest. Dann gilt $P(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i (x - \xi)^i$, wobei $b_k = \sum\limits_{i=k}^{n} a_i \binom{i}{k} \xi^{i-k}$ für $k = 0, \ldots, n$.*

Korollar 3.5 *Sei P Polynom vom Grad n und $P(\xi) = 0$ für ein $\xi \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein Polynom Q von Grad $n-1$ mit $P(x) = (x-\xi) \cdot Q(x)$.*

Satz 3.6 (Nullstellensatz / Identitätssatz für Polynome)

a) P sei Polynom vom Grad $n \geq 1 \Rightarrow P$ hat höchstens n Nullstellen.

b) P, Q seien Polynome vom Grad $\leq n$. Falls P und Q an $n+1$ Stellen übereinstimmen so folgt $P = Q$.

Ergänzung (Fundamentalsatz der Algebra)
Ein Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Nullstellen.

Sei P Polynom vom Grad n. Nach Abspaltung der (reellen) Nullstellen hat P die Darstellung

$$P(x) = (x-\xi_1) \cdot (x-\xi_2) \cdot \ldots \cdot (x-\xi_k) \cdot Q_k(x)$$

und $\mathrm{Grad}(Q_k) = n-k$, Q_k hat keine (reellen) Nullstellen. Es seien $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_l\} = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, wobei $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ gelte. D.h. die λ_i, $i = 1, \ldots, l$ sind die *unterschiedlichen* Nullstellen von P. Dann hat P die Darstellung

$$P(x) = (x-\lambda_1)^{s_1} \cdot (x-\lambda_2)^{s_2} \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_l)^{s_l} \cdot Q_k(x)$$

Für $i = 1, \ldots, l$ heißt s_i Vielfachheit der Nullstelle λ_i. Es gilt $s_1 + \ldots + s_l = k$.

3.2 Monotone Funktionen

Definition 3.7 *Es sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt*

a) monoton wachsend, wenn aus $x < y$, $x, y \in D$ folgt $f(x) \leq f(y)$

b) streng monoton wachsend, wenn aus $x < y$, $x, y \in D$ folgt $f(x) < f(y)$

c) monoton fallend, wenn aus $x < y$, $x, y \in D$ folgt $f(x) \geq f(y)$

d) streng monoton fallend, wenn aus $x < y$, $x, y \in D$ folgt $f(x) > f(y)$

Satz 3.8 *Seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.*

a) $f + g$, $\lambda \cdot f$ $(\lambda > 0)$ sind monoton wachsend.

b) $f, g > 0$. Dann ist $f \cdot g$ monoton wachsend; $\frac{1}{f}$ monoton fallend.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ ist x^n streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$; x^{-n} ist streng monoton fallend auf $(0, \infty)$.

3.3 Die Lipschitz-Bedingung

Definition 3.9 *Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügt einer Lipschitz-Bedingung auf D, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, sodass gilt*

$$| f(x) - f(y) | \leq \ L \mid x - y \mid \ \ \forall x, y \in D$$

kurz: $f \in Lip(D)$; L heißt Lipschitz-Konstante von f auf D.

Lemma 3.10

a) Falls $f, g \in Lip(D)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, \lambda \cdot f \in Lip(D)$

b) D beschränkt, $f \in Lip(D) \Rightarrow f$ beschränkt.

c) D beschränkt, $f, g \in Lip(D) \Rightarrow f \cdot g \in Lip(D)$.

d) D beschränkt, P Polynom $\Rightarrow P \in Lip(D)$.

Satz 3.11 (Satz über die Umkehrfunktion)

Voraussetzung:

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und für jedes Intervall $[a, b] \subset I$ gelte $f \in Lip([a, b])$.

Behauptung:

i) $I^* = f(I)$ ist ein Intervall

ii) $f : I \to I^*$ ist bijektiv

iii) $f^{-1} : I^* \to I$ ist streng monoton wachsend

Beispiel: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$f : \begin{cases} [0, \infty) & \to & [0, \infty) \\ x & \mapsto & x^n \end{cases}$$

ist streng monoton wachsend und $f \in Lip([0, k])$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 3.11 gibt es eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Bezeichnung: $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ "n-te Wurzel"

Achtung: die n-te Wurzel ist immer ≥ 0

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}, \qquad \sqrt{a^2} = | a |$$

$$\sqrt{4} = 2 \quad (\sqrt{4} = -2 \quad \text{oder } \sqrt{4} = \pm 2 \text{ ist falsch!})$$

Satz 3.12 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel) *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ gegebene reelle Zahlen. Dann gilt:*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

und "=" gilt genau dann, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Definition 3.13 (Potenzen mit rationalem Exponenten)

Sei $r = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Für $a \in \mathbb{R}^+$ definiere $a^r := \sqrt[q]{a^p}$ und $a^0 := 1$.

Bemerkung (Wohldefiniertheit der Potenz mit rationalem Exponenten)

Sei $r = \dfrac{p}{q} = \dfrac{n \cdot p}{n \cdot q}$ und sei $\xi = \sqrt[q]{a^p}$ sowie $\eta = \sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}}$. Gilt dann $\eta = \xi$? Ja, denn man beachte: $\xi^q = a^p, \xi^{n \cdot q} = a^{n \cdot p} = \eta^{n \cdot q}$ also $\xi = \eta$.

Satz 3.14 *Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$, $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gilt:*

a) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$

b) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$

c) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

d) $x \mapsto x^r$ *ist streng monoton wachsend für $r > 0$, streng monoton fallend für $r < 0$.*

e) Sei $r < s$. Für $a > 1$ gilt $a^r < a^s$ und für $0 < a < 1$ gilt $a^r > a^s$.

4 Zahlenfolgen und Konvergenz

Definition 4.1

Sei $p \in \mathbb{Z}$ und $Z_p := \{n \in \mathbb{Z} : n \geq p\}$. Eine Abbildung $a : Z_p \to \mathbb{R}$ heißt reelle Zahlenfolge.

Schreibweise: Folgenglieder $a_n := a(n)$, Folge $(a_n)_{n \geq p}$ oder (a_n)

Übertragung der Begriffe aus 3.2 und 3.7

Die Folge (a_n) heißt beschränkt, falls $c \geq 0$ existiert mit $\mid a_n \mid \leq c$ für alle $n \geq p$.

Die Folge (a_n) heißt monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq p$.

analog monoton fallend, streng monoton wachsend / fallend

Definition 4.2 (Nullfolge) *Eine Folge (a_n) heißt Nullfolge, falls zu jedem $\epsilon \geq 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt:*

$$n \geq N \Rightarrow \mid a_n \mid \leq \epsilon.$$

Schreibweise

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, $a_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ oder nur $a_n \to 0$

Lemma 4.3

a) (a_n) Nullfolge, (b_n) beschränkte Folge $\Rightarrow (a_n \cdot b_n)$ Nullfolge

b) Falls $a_n \to 0$ und falls $c > 0$ existiert mit $\mid b_n \mid \leq \ c \mid a_n \mid$, dann folgt $b_n \to 0$

c) Aus $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$ folgt $a_n + b_n \to 0$

Beispiele von Nullfolgen

a) falls $a_n \to 0$ und $p > 0 \ \Rightarrow \ \sqrt[p]{\mid a_n \mid} \to 0$

b) $p > 0 : \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$

c) Für $0 < \mid q \mid < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

d) Für $0 < \mid q \mid < 1$ und $p \geq 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0$

Definition 4.4

Eine Folge (a_n) heißt konvergent, falls $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $(a_n - a)$ Nullfolge ist. a heißt Grenzwert von (a_n). Eine Folge (a_n) heißt divergent, falls (a_n) nicht konvergiert.

Schreibweise

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \to a$ für $n \to \infty$, $a_n \overset{n\to\infty}{\to} a$ oder nur $a_n \to a$

Gleichbedeutend zur Definition 4.4:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $n \geq N \Rightarrow \mid a_n - a \mid \leq \epsilon$.

Satz 4.5 *Sei (a_n) konvergent. Dann gilt:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *ist eindeutig bestimmt.*

b) (a_n) *ist beschränkt.*

Satz 4.6 *Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $f \in Lip([c,d])$ mit $a \in (c,d)$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.*

Folgerung

Ist P Polynom und $a_n \overset{n\to\infty}{\to} a$, so folgt $P(a_n) \overset{n\to\infty}{\to} P(a)$.

Lemma 4.7 *Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann folgt:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, *falls $b \neq 0$,*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \mid a_n \mid = \mid a \mid$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = a^p$ *für $p \in \mathbb{N}$,*

c) Falls ein $N \in \mathbb{N}$ exisitert und $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$, so folgt $a \leq b$.

Satz 4.8 (Sandwich-Theorem) *Falls $a_n \to a$, $b_n \to a$ für $n \to \infty$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$, so folgt, dass $c_n \to a$ für $n \to \infty$.*

Beispiele

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\cdot(n+1)}{2n^2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3-4n^2+7}{2n^3+5n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^3}}{2+\frac{5}{n^2}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 3-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{5}{n^2}} = \dfrac{3}{2}$

c) Sei $a > 0$. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

1. Fall $a > 1$, dann gilt $1 < a < n$ für große n, also: $1 = \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ und mit dem Sandwich-Theorem folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2. Fall $0 < a < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = 1$, d.h. $\overset{\textit{Lemma } 4.7a}{\Rightarrow} \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$

Definition 4.9 (Teilfolgen, Umordnungen)

Sei $(a_n)_{n\geq p}$ eine Folge, $Z_p = \{z \in \mathbb{Z},\ z \geq p\}$ und sei $\Phi : Z_p \to Z_p$ eine Abbildung. Durch $b_n := a_{\Phi(n)}$ für $n \in Z_p$ wird eine neue Folge $(b_n)_{n\geq p}$ definiert.

a) Ist Φ bijektiv, so heißt (b_n) Umordnung von (a_n).

b) Ist Φ streng wachsend, so heißt (b_n) Teilfolge von (a_n).

Beispiel

$a_n = \frac{1}{n}$. Dann sind $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ und $\left(\frac{1}{2n}\right)$ Teilfolgen von (a_n).

Satz 4.10 *Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Jede Umordnung und jede Teilfolge von (a_n) konvergiert auch gegen a.*

Definition 4.11 (Bestimmte Divergenz) *Eine Folge $(a_n)_{n\geq p}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$) , falls zu jedem $K > 0$ ein Index $N \in Z_p$ existiert, sodass gilt:*

$$n \geq N \Rightarrow a_n > K \qquad \textit{(bzw. } a_n < -K\textit{)}.$$

Schreibweise

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $a_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $a_n \overset{n\to\infty}{\to} -\infty$

Satz 4.12 (Monotone Konvergenz) *Sei $(a_n)_{n\geq p}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge. Dann ist $(a_n)_{n\geq p}$ konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq p} a_n.$$

Schreibweise: $a_n \nearrow a$

Analog: *Sei $(a_n)_{n\geq p}$ eine monoton fallende und beschränkte Folge. Dann ist $(a_n)_{n\geq p}$ konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geq p} a_n.$$

4.1 Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenzfunktion

Ziel: Definition von a^x für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

Idee: Wähle eine Folge $(r_n)_{n\geq 1}$, r_n rational, $r_n \to x$ und untersuche die Folge $(a^{r_n})_{n\geq 1}$.

Lemma 4.13 *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine monoton wachsende Folge $(r_n)_{n\geq 1}$ von rationalen Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.*

Lemma 4.14 *Sei $a > 0, m \in \mathbb{N}$ und $J = [-m, m]$. Dann existiert $L_m > 0$ mit der Eigenschaft:*

$$\forall\ r, s \in J \cap \mathbb{Q} \textit{ gilt: } \mid a^r - a^s \mid \leq L_m \mid r - s \mid .$$

Satz 4.15 *Sei $a > 0, x \in \mathbb{R}$ und $(r_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Dann existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ und ist unabhängig von der Wahl der Folge $(r_n)_{n\geq 1}$. Definiere $a^x := \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.*

Satz 4.16 (Eigenschaften von a^x)

a) Sei $a > 0$. Die Funktion $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x \end{array} \right.$ heißt allgemeine Exponentialfunktion. Es gilt:

- *i)* $a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{x\cdot y}, \quad (a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- *ii)* *$a^x \in Lip([-m, m])$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt: aus $x_n \to x$ folgt $a^{x_n} \to a^x$.*
- *iii)* *für $a > 1$ ist a^x streng monoton wachsend.*
- *iv)* *für $0 < a < 1$ ist a^x streng monoton fallend.*

b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Funktion $\begin{cases} (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{cases}$ *heißt allgemeine Potenzfunktion.*

(Definiere $0^\alpha := 0$ für $\alpha > 0$). Sie ist für $\alpha > 0$ streng wachsend auf $[0,\infty)$ und für $\alpha < 0$ streng fallend auf $(0,\infty)$.

Betrachte für $a > 1$ nochmals die Funktion $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x \end{cases}$

f ist streng monoton wachsend, $f \in Lip(I)$ für jedes beschränkte Intervall I. Nach Satz 3.11 (Satz über die Umkehrfunktion) ist $f(\mathbb{R})$ ein Intervall.

Bestimme den Bildbereich $f(\mathbb{R})$: Sei $a = 1 + h$, $h > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $a^n = (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h$ und $a^{-n} \leq \dfrac{1}{1 + n \cdot h}$. Folglich: $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = 0$, also $f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$.

Analog: der Bildbereich von x^α für $x \in (0,\infty)$ ist $(0,\infty)$.

Definition 4.17 *Die Umkehrfunktion f^{-1} von a^x heißt $\log_a x$ (Logarithmus von x zur Basis a). Es gilt: $f^{-1} : \begin{cases} (0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log_a x \end{cases}$ ist streng monoton wachsend.*

Es gelten die Rechenregeln (vgl. 4.16):

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a(x^y) = y \cdot \log_a x, \quad \log_a 1 = 0$

Die Zahl e: Sei $x \geq -n,\ x \neq 0$:

$$\Big[1 \cdot \underbrace{\Big(1 + \frac{x}{n}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{x}{n}\Big)}_{n-\text{mal}}\Big]^{\frac{1}{n+1}} \overset{\text{AGM-Ungl.}}{<} \frac{n+1+x}{n+1} \Longrightarrow \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n < \Big(1 + \frac{x}{n+1}\Big)^{n+1},$$

d.h., **Folgerungen:**

i) $a_n = \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n$ monoton wachsend in n

ii) $b_n = \Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)^n$ monoton wachsend in n

iii) $c_n = \dfrac{1}{b_{n+1}} = \Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{n+1} = \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^{n+1}$ monoton fallend und $a_n < c_n$.

Definition 4.18 $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n.$

Beachte: wegen $c_n = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$ *gilt auch* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e.$

4.2 Häufungswerte von Folgen, Konvergenzkriterium von Cauchy

Definition 4.19 *$a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert einer Folge $(a_n)_{n\geq p}$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ für unendlich viele $n \geq p$ gilt:*

$$\mid a_n - a \mid < \epsilon.$$

Beispiel:

$1+\frac{1}{n}$ hat den Häufungswert 1; $\frac{1}{n}+(-1)^n$ hat die Häufungswerte $-1,\ 1$

Lemma 4.20 *$a \in \mathbb{R}$ ist Häufungswert von (a_n) $\Leftrightarrow$ es existiert eine Teilfolge von (a_n) mit Grenzwert a.*

Satz 4.21 (Bolzano-Weierstraß)

Sei $(a_n)_{n\geq p}$ eine beschränkte Folge und $H = \{$Häufungswerte von $(a_n)\}$. Dann gilt:

a) $H \neq \emptyset$

b) Es gibt $a^* = \max H$ und $a_* = \min H$. Schreibweise:

$a^* =: \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ *(limes superior)* , $a_* =: \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *(limes inferior)*

c) Sei $\epsilon > 0$. Es gilt:

$a_n > a^* + \epsilon$ *nur für endlich viele n;* $a_n > a^* - \epsilon$ *für unendlich viele n.*

$a_n < a_* - \epsilon$ *nur für endlich viele n;* $a_n < a_* + \epsilon$ *für unendlich viele n.*

Korollar 4.22 *(a_n) sei beschränkte Folge. Dann gilt:*

$$(a_n) \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Definition 4.23 *Eine Folge $(a_n)_{n\geq p}$ heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N \geq p$ existiert, sodass gilt:*

$$n, m \geq N \Rightarrow \mid a_n - a_m \mid < \epsilon.$$

Satz 4.24 (a_n) *konvergiert* $\Leftrightarrow$ (a_n) *ist Cauchy-Folge.*

Beispiel:

$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, a_n ist monoton wachsend.

Frage: Ist (a_n) konvergent? Antwort: Nein, (a_n) ist keine Cauchy-Folge, denn

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n+1} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

5 Unendliche Reihen

Definition 5.1 *Sei $(a_n)_{n\geq p}$ eine gegebene reelle Zahlenfolge. Für $k \geq p$ heißt*

$$s_k = \sum_{n=p}^{k} a_n = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_k$$

k-te Teilsumme. Die Folge der Teilsummen $(s_k)_{k\geq p}$ heißt unendliche Reihe mit Gliedern a_n. Die unendliche Reihe heißt konvergent, falls die Folge $(s_k)_{k\geq p}$ der Teilsummen konvergiert.

die Folge der Teilsummen s_k.

Das Symbol $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$ steht für

$\lim\limits_{k\to\infty} s_k$, falls s_k konvergiert.

Beispiele:

i) Geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \neq 0$:

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x} \quad (x \neq 1)$$

$|x| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} s_k = \dfrac{1}{1-x}$

$|x| \geq 1 \Rightarrow s_k$ ist divergent.

Man sagt: Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für $|x| < 1$ und hat den Wert $\dfrac{1}{1-x}$.

ii) Harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergiert, denn $(s_k)_{k\geq 1}$ ist keine Cauchy-Folge (vgl. letztes Beispiel Kapitel 4).

Satz 5.2 *Sei $(a_n)_{n\geq p}$ Folge. Dann gilt: die Reihen $\sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=q}^{\infty} a_n$ $(q > p)$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+p}$ haben das gleiche Konvergenzverhalten und im Fall der Konvergenz gilt die Beziehung:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} = \sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + \ldots + a_{q-1} + \sum_{n=q}^{\infty} a_n.$$

Folgerung: Es genügt, im Folgenden Reihen der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ zu betrachten.

Satz 5.3 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ *seien konvergent. Dann gilt:*

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *konvergiert und* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$

b) $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$

Satz 5.4 *Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. Dann ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge und ebenso $(r_n)_{n\geq 0}$, wobei $r_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i$ die Folge der Reihenreste ist.*

5.1 Reihen mit positiven Gliedern

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ Folge mit $a_n \geq 0$, $s_k = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \quad &\Leftrightarrow \quad (s_k)_{k\geq 0} \text{ ist beschränkt} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert gegen } \infty \quad &\Leftrightarrow \quad (s_k)_{k\geq 0} \text{ ist unbeschränkt} \end{aligned}$$

Satz 5.5 (Majoranten-/ Minorantenkriterium)

a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *konvergent und* $0 \le a_n \le c_n$*. Dann ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent.*

b) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ *divergent und* $0 \le d_n \le a_n$*. Dann ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Beispiele

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$ divergent, denn $\frac{1}{5n+2} \ge \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n+1}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergiert.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, denn $\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $(n \ge 2)$ und

$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$ (konvergent), da $s_k = \sum_{n=2}^{k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{k}$

5.2 Alternierende Reihen

Definition 5.6 *Eine Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heißt alternierend, falls stets* $(-1)^n \cdot a_n \ge 0$ *oder* ≤ 0 *ist für alle* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Satz 5.7 (Leibnizkriterium)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *alternierend und* $(|a_n|)_{n \ge 0}$ *sei eine streng monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*.*

Beispiele

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log_a n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{konvergieren.}$$

5.3 Konvergenzkriterien

Satz 5.8 (Cauchykriterium für Reihen)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert* $\Leftrightarrow \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$, *sodass gilt:* $k > l \geq N \Rightarrow \Big| \sum_{n=l+1}^{k} a_n \Big| < \epsilon$.

Definition 5.9 (absolute Konvergenz)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *heisst absolut konvergent, falls* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

Beispiele

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ absolut konvergent

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nicht absolut konvergent, aber konvergent

Satz 5.10 *Ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent, so ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent und es gilt:* $|\sum_{n=0}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Satz 5.11 (Wurzelkriterium) *Sei* (a_n) *Folge:*

a) Falls $q \in (0, 1)$ *und* $N \in \mathbb{N}$ *existieren mit* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ *für alle* $n \geq N$, *so ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

b) Falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ *für unendlich viele* n, *so ist* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Satz 5.12 (Quotientenkriterium)

a) Falls $q \in (0,1)$ *und* $N \in \mathbb{N}$ *existieren mit den Eigenschaften* $a_n \neq 0$ *und* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ *für alle* $n \geq N$ *ist, so ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

b) Falls $N \in \mathbb{N}$ *existiert mit den Eigenschaften* $a_n \neq 0$ *und* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ *für alle* $n \geq N$, *so ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Korollar 5.13

a) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

c) $\limsup\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

d) $\liminf\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Beispiele

a) Für $p \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1,1)$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p \cdot x^n$ absolut konvergent. Wurzelkriterium:

$\sqrt[n]{n^p|x|^n} = \sqrt[n]{n}^p|x| \overset{n\to\infty}{\to} 1^p|x| < 1$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert, denn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$, denn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x| \cdot n!}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$:

$\alpha = 1$: divergent
$\alpha < 1$: divergent, denn $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$
$\alpha = 2$: konvergent
$\alpha > 2$ konvergent, denn $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$

Was passiert für $1 < \alpha < 2$?

Satz 5.14 (Verdichtungssatz von Cauchy)

Sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, a_n monoton fallend. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}}_{\text{verdichtete Reihe}} \quad \text{konvergent}$$

Beispiel

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $a_{2^n} = \frac{1}{2^{\alpha \cdot n}}$, $2^n \cdot a_{2^n} = 2^{(1-\alpha)\cdot n} = q^n$ mit $q = 2^{1-\alpha} < 1$, da $\alpha > 1$.

D.h. die "verdichtete Reihe" $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ (geometrische Reihe) ist konvergent. $\overset{S.5.14}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert für $1 < \alpha < 2$ (sogar für $1 < \alpha < \infty$)

Definition 5.15 (Umordnung von Reihen)

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge und $\Phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bijektiv. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ eine Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Satz 5.16 (1. Umordnungssatz)

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolut konvergiert, so konvergiert jede Umordnung gegen den selben Wert.*

Lemma 5.17 $(a_n)_{n\geq 0}$ *sei Folge und* $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$. *Dann gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \textit{ ist absolut konvergent } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \textit{ sind konvergent}$$

Satz 5.18 (2. Umordnungssatz)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergent, aber nicht absolut konvergent. Zu jedem* $c \in \mathbb{R}$ *existiert eine Umordnung mit* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)} = c$.

5.4 Doppelreihen

Definition 5.19

a) *Eine Abbildung* $a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{R} \\ (i,j) & \mapsto & a_{ij} \end{array} \right.$ *heißt Doppelfolge.*

b) *Sei* $\Phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *eine Bijektion und* $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$ *eine Doppelfolge. Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ *heißt Realisierung der Doppelreihe* $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$.

Beachte: Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ *absolut konvergiert, so ist der Wert* $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\Phi(n)}$ *unabhängig von* Φ. *In diesem Fall heißt die Doppelreihe* $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ *absolut konvergent und hat den Wert* S.

Satz 5.20 *Sei* $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$ *eine Doppelfolge. Falls* $K > 0$ *existiert mit* $\sum_{i,j=0}^{m} |a_{ij}| < K \ \forall m \in \mathbb{N}$, *dann ist* $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ *absolut konvergent und es gilt:*

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\Big) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{k} a_{i,k-i}\Big)$$

5.5 Multiplikation von Reihen

Satz 5.21 *Falls* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut konvergieren, dann konvergiert die Doppelreihe* $\sum_{i,j=0}^{\infty} (a_i \cdot b_j)$ *absolut und es gilt:*

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} (a_i \cdot b_j) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$$

Man kann die Produktreihe auch wie folgt berechnen:

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} (a_i \cdot b_j) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}\Big)$$

Diese Art der Summation heißt Cauchy-Produkt.

Beispiel:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!},$$

da $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k \cdot y^{n-k}$

Später werden wir sehen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, d.h. wir haben soeben $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ verifiziert.

6 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Ziel: Erklärung des Begriffs $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ sowie des Begriffs der Stetigkeit von f im Punkt ξ. Dazu sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf $D \subset \mathbb{R}$.

Definition 6.1

a) *$\xi \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von D, wenn in jedem Intervall $(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$, $\epsilon > 0$ unendlich viele Punkte von D liegen.*

b) *$\xi \in D$ heißt isolierter Punkt von D, wenn ξ kein Häufungspunkt von D ist. In diesem Fall ex. $\delta > 0$, sodass gilt $(\xi - \delta, \xi + \delta) \cap D = \{\xi\}$*

Beispiel: Sei $D = (-1, 1) \cup \{2\}$. Dann ist 2 ein isolierter Punkt und die Häufungspunkte von D sind $[-1, 1]$.

Definition 6.2 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von D. Man sagt: f strebt gegen $a \in \mathbb{R}$ für $x \to \xi$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft*

$$|x - \xi| < \delta,\ x \in D \setminus \{\xi\} \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon.$$

In Symbolen: $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to \xi$.

Definition 6.3 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\xi \in D$. f heißt stetig an der Stelle ξ, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft*

$$|x - \xi| < \delta,\ x \in D \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon$$

Bemerkungen:

a) Sei $x \in D$ Häufungspunkt. f ist stetig an der Stelle $\xi \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$

b) Sie $\xi \in D$ isolierter Punkt. Dann ist f automatisch stetig im Punkt ξ.

Satz 6.4 *Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $\xi \in D$. Falls $f(\xi) > 0$ ist, dann ex. $\delta, \eta > 0$ mit $f(x) \geq \eta > 0$ für alle $x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap D$.*

Definition 6.5 *$f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig auf D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist. Man schreibt $f \in C(D)$.*

Satz 6.6 *$Lip(D) \subset C(D)$. D.h. jede Funktion, die auf D einer Lipschitz-Bedingung genügt, ist stetig auf D. Sprechweise: f ist Lipschitz-stetig.*

Beispiele:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \neq 2 \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$. Dann ist $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, denn $x^2 \in Lip([1,3])$ und $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. f ist stetig in allen Punkten $x \neq 2$ und unstetig bei $x = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{|x|}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}$; insbesondere bei $x = 0$.

Definition 6.7 (Einseitiger Limes, einseitige Stetigkeit)

a) *$f : (\xi, \xi + \alpha) \to \mathbb{R}$ hat in ξ einen rechtsseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls $\forall\ \epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass gilt:*

$$\xi < a < \xi + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$$

Symbol: $a = f(\xi+) = \lim\limits_{x \to \xi+} f(x)$.

Analog für den linksseitigen Grenzwert: $a = f(\xi-) = \lim\limits_{x \to \xi-} f(x)$

b) *$f : [\xi, \xi + \alpha) \to \mathbb{R}$ heißt rechtsseitig stetig in ξ, falls $f(\xi) = f(\xi+)$*

c) *$f : (\xi - \alpha, \xi] \to \mathbb{R}$ heißt linksseitig stetig in ξ, falls $f(\xi) = f(\xi-)$*

Satz 6.8 (Folgenkriterium) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

a) *ξ sei Häufungspunkt von D. Dann gilt:*

$\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = a \Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n) \subset D \setminus \{\xi\}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$

b) *f stetig in $\xi \in D \Leftrightarrow$für jede Folge $(x_n) \subset D$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi \in D$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\xi)$*

Lemma 6.9 (Rechenregeln für Grenzwerte)

Seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ Funktionen und es existieren $A = \lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ und $B = \lim\limits_{x\to\xi} g(x)$. Dann gilt:

a) $\lim\limits_{x\to\xi} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot A$

b) $\lim\limits_{x\to\xi} \Big(f(x) + g(x)\Big) = A + B,\ \lim\limits_{x\to\xi} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = A \cdot B$

c) falls $B \neq 0$, dann gilt: $\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

d) gilt $f(x) \leq g(x)\ \forall\ x \in D$, so folgt $A \leq B$

e) gilt $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ und gilt $A = B$, dann folgt $\lim\limits_{x\to\xi} h(x) = A$

Beispiele:

a) $(n \in \mathbb{N})\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = n$, denn $x^n - 1 = (x-1)\cdot(1+x+\ldots+x^{n-1})$ und $\lim\limits_{x\to 1} x^m = 1\ \forall\ m \in \mathbb{N}$ (Regel b))

b) Sei $\alpha > 0$. $\lim\limits_{x\to 1} x^\alpha = 1$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \alpha < n$. Dann gilt für

$$x > 1 : 1 < x^\alpha < x^n$$
$$0 < x < 1 : x^n < x^\alpha < 1$$

Mit Regel e) $\lim\limits_{x\to 1} x^\alpha = 1$. Für $\alpha < 0$ folgt $\lim\limits_{x\to\xi} x^\alpha = 1$ mit c)

Satz 6.10 (Konvergenzkriterium von Cauchy) *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ξ sei Häufungspunkt von D. Dann gilt: $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)$ existiert $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, sodass gilt: aus $x, y \in D \setminus \{\xi\}$ und $|x - \xi|, |y - \xi| < \delta$ folgt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Lemma 6.11 *Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $\xi \in D$. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$, dass $\lambda \cdot f,\ f + g,\ f \cdot g$ stetig in ξ sind. Falls $g(\xi) \neq 0$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in ξ.*

Satz 6.12 *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und sei $\xi \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von D. Dann gilt:*

$\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = a \Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n), (y_n)$ in D mit $x_n < \xi$ bzw. $\xi < y_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \xi$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = a$

Folgerung:

f ist stetig in $\xi \in D \Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n), (y_n)$ in D mit $x_n < \xi$ bzw. $\xi < y_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \xi$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(\xi)$.

Mit anderen Worten: f stetig in $\xi \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\xi-} f(x) = \lim\limits_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$.

Satz 6.13 (Komposition stetiger Funktionen) *Seien $f : D \to \mathbb{R},\ g : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset \tilde{D}$ und $h : D \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $h = g \circ f$. Ist f stetig in $\xi \in D$ und g stetig in $f(\xi) \in \tilde{D}$, dann ist h stetig in ξ.*

Beispiele:

a) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $\xi \in D$. Dann sind $f^+,\ f^-,\ |f|,\ \max\{f, g\},\ \min\{f, g\}$ stetig in $\xi \in D$.

b) Seien $\alpha \in \mathbb{R}, \xi > 0$. Wir zeigen: $\lim\limits_{x\to\xi} x^\alpha = \xi^\alpha$. Sei $f(x) = \frac{x}{\xi}, g(y) = (\xi \cdot y)^\alpha$. Dann ist g stetig bei $y = 1$ und f stetig bei $x = \xi$. Also gilt $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = 1,\ \lim\limits_{y\to 1} g(y) = g(1) = \xi^\alpha$. Folglich $\lim\limits_{x\to\xi} x^\alpha = \lim\limits_{x\to\xi} g(f(x)) = \xi^\alpha$ mit Satz 6.13.

   Die allgemeine Potenzfunktion ist demzufolge stetig auf $(0, \infty)$.

Satz 6.14 (stetige Funktionen auf kompakten Intervallen) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, d.h. $I = [a, b]$ für $a < b, a, b \in \mathbb{R}$. Falls $f : I \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gilt:*

a) f ist beschränkt

b) f nimmt Minimum und Maximum an, d.h. $\exists x_*,\ x^* \in I$ mit $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)\ \forall x \in I$

Satz 6.16 (Nullstellensatz)

Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) > 0,\ f(b) < 0$ (oder umgekehrt). Dann hat f in $[a, b]$ eine erste Nullstelle c_1 und eine letzte Nullstelle c_2 mit $a < c_1 \leq c_2 < b$.

Korollar 6.17 (Zwischenwertsatz)

Ist $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Korollar 6.18 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f \in C(I)$. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

Satz 6.19 (Satz über Stetigkeit der Umkehrfunktion)

Sei I beliebiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig und streng monoton wachsend (fallend) sowie $I^* := f(I)$. Dann ist $f^{-1} : I^* \to I$ stetig und streng monoton wachsend (fallend).

Definition 6.20 (Gleichmäßige Stetigkeit) *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, auf $D \subset \mathbb{R}$, falls $\forall \epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass gilt:*

$$(*) \quad \forall x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ folgt } |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Beachte: $\delta > 0$ muss so gewählt werden, dass die Bedingung $(*)$ für alle $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ erfüllt ist.

Beispiele:

a) $f(x) = \sqrt{x},\ D = [0, \infty)$ ist gleichmäßig stetig.
Beachte: für $x, y \geq 0$ gilt: $|x - y| \leq x + y + 2\sqrt{x \cdot y}$, also $\sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$
Folglich: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \dfrac{|x-y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leq \dfrac{|x-y|}{\sqrt{|x-y|}} = \sqrt{|x-y|} < \epsilon$, falls $|x-y| \leq \delta := \epsilon^2$ und $x \neq y$ und entweder $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ (in diesen Ausnahmefällen ist die Abschätzung allerdings auch richtig).

b) $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in D = (0, 1]$. Seien $x, y > \eta \geq 0$

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{|x-y|}{x \cdot y} \leq \frac{|x-y|}{\eta^2} \leq \epsilon,$$

falls $|x - y| < \delta := \eta^2 \cdot \epsilon$

Problem: Wahl von ϵ hängt davon ab, dass $x, y \geq \eta > 0$ sind. Es ist unmöglich δ unabhängig von $x, y \in (0, 1]$ zu wählen, denn $x := \frac{1}{n},\ y := \frac{1}{2n}$ ergeben, dass $|x - y| = \frac{1}{2n}$ beliebig klein, aber $|f(x) - f(y)| = n$ beliebig groß wird.

c) $f \in Lip(D)$. Dann ist f gleichmäßig stetig auf D. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, L Lipschitzkonstante.

Satz 6.21 *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $I = [a, b]$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf I.*

Definition 6.22 (Grenzwerte für $x \to \pm\infty$) *Sei $f : (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f strebt gegen $a \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$, falls gilt: $\forall \epsilon > 0$ existiert $c > \alpha$ mit der Eigenschaft:*

$$x > c \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$$

In Symbolen: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a, \quad f(x) \to a$ *für* $x \to \infty$

Analog: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$, *falls* $f : (-\infty, \alpha) \to \mathbb{R}$.

Bemerkungen:

Es gelten folgende Beziehungen:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0+} f(\frac{1}{t}) = a, \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0-} f(\frac{1}{t}) = a$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n) mit $x_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ gilt $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} a$

Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{2 - t^2}{1 + 3t + 2t^2} = 2$$

Definition 6.23 (Uneigentliche Grenzwerte)

a) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und ξ Häufungspunkt von D. Man sagt: $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \infty$ (bzw. $-\infty$), falls $\forall K > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft

$$|x - \xi| < \delta,\ x \in D \setminus \{\xi\} \Rightarrow f(x) > K \ (\textit{bzw. } f(x) < -K).$$

b) Sei $f : (\alpha, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, falls $\forall K > 0$ ein $c > \alpha$ existiert mit der Eigenschaft:

$$x > c \Rightarrow f(x) > K.$$

Analog definiert man $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (bzw. $-\infty$)

Beispiele:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$, falls $\alpha > 0$, denn $x^\alpha > K$ falls $x > c := K^{\frac{1}{\alpha}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$, denn $\frac{1}{1-x} < -K$ falls $1 < x < 1 + \delta, \delta := \dfrac{1}{K}$.

7 Potenzreihen

Definition 7.1

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe (in der Variablen x).

Bemerkungen

a) Wie bei Polynomen definiert man $x^0 := 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Gelegentlich werden Potenzreihen auch in der Form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-\xi)^n$ betrachtet ($\xi \in \mathbb{R}$ fest).

7.1 Punktweise/gleichmäßige Konvergenz

Definition 7.2 *Sei $D \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ sowie $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.*

a) $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise gegen f, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. D.h. zu jedem $x \in D$ und zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index $N = N(\epsilon, x) \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \; \forall \; n \geq N$.

b) $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, falls gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es einen Index $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$.

Bemerkung: aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz

Beispiele

a) $D = [a, b]$, $f_n(x) = \frac{1}{n}x^2$. $f_n(x)$ konvergiert gleichmäßig auf D gegen die Nullfunktion $f = 0$, denn:

$|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n} \max\{a^2, b^2\} < \epsilon$, falls $n > \dfrac{1}{\epsilon} \max\{a^2, b^2\}$

b) $D = [0,1],\ f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise.

Für $x = 1$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$

Für $x \in [0,1)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

Definiere $f(x) := \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

$f_n(x)$ konvergiert punktweise auf $[0,1]$ gegen f, aber $f_n(x)$ konvergiert nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f.

Satz 7.3 (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)

Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von Funktionen konvergiert genau dann gleichmäßig auf D, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq N \text{ und alle } x \in D$$

Satz 7.4 *Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiere gleichmäßig auf D gegen die Funktion f. Falls jede Funktion f_n an der Stelle $\xi \in D$ stetig ist, so ist auch die Funktion f stetig an der Stelle ξ.*

7.2 Anwendung auf Funktionenreihen

Definition 7.5 *Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen auf D. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ heißt gleichmäßig konvergent auf D, falls die Funktionenfolge $(s_k)_{k\geq 0}$ der Teilsummen, definiert durch $s_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n x^n$, gleichmäßig auf D konvergiert.*

Satz 7.6 (Weierstraß'sches Majorantenkriterium)

Sei $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen auf D und $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|f_n(x)| \leq a_n$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$. Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig auf D.

Satz 7.7 (Konvergenzsatz für Potenzreihen)

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Sei* $L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *(*$L = \infty$ *zugelassen) und* $r := \frac{1}{L}$ *(wobei* $r = 0$ *falls* $L = \infty$ *und* $r = \infty$ *falls* $L = 0$*). Dann gilt:*

a) *Die Reihe konvergiert absolut auf* $D = \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *ist stetig auf* D.

b) *Die Reihe divergiert für* $x \in \mathbb{R}, |x| > r$.

c) *Sei* $0 < s < r$. *Dann konvergiert die Reihe gleichmäßig auf* $D_s = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq s\}$.

d) *Falls* $a_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ *und falls* $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ *existiert (Wert* ∞ *erlaubt), so gilt:* $r = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$.

r *heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.*

7.3 Die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\exp(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gleichmäßig auf beschränkten Intervallen, insbesondere ist $\exp(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Proposition 7.8 *Es gilt* $\exp(x) = \tilde{e}^x \; \forall x \in \mathbb{R}$ *mit* $\tilde{e} := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Satz 7.9 $\forall x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \tilde{e}^x$. *Insbesondere gilt* $\tilde{e} = e =$*Eulersche Zahl.*

Korollar 7.10 $\forall \alpha > 0$ *gilt:* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$, $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$

7.4 Sinus, Cosinus

Definition 7.11

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Satz 7.12 $\sin x, \cos x$ *sind stetig auf* $\mathbb{R}$*, beide haben Konvergenzradius* $r = \infty$*.*

Lemma 7.13 (Eigenschaften von $\sin x, \cos x$)

a) $\sin 0 = 0$; $\cos 0 = 1$

b) $\sin(-x) = -\sin x$; $\cos(-x) = \cos x$

c) Additionstheoreme:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

d) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Lemma 7.14 $\cos x$ *besitzt eine erste positive Nullstelle im Intervall* $(1,3)$*.*

Definition 7.15 $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnet die erste positive Nullstelle von* $\cos x$*.*

Korollar 7.16

a) $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\sin \pi = 0$; $\sin 2\pi = 1$; $\cos \pi = -1$; $\cos 2\pi = 1$

b) $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

c) $\sin(x + \pi) = -\sin x$; $\cos(x + \pi) = -\cos x$

d) $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$; $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x = -\cos(-x + \frac{\pi}{2})$

Korollar 7.17 *Auf* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *ist* $\cos x$ *streng monoton fallend,* $\sin x$ *streng monoton steigend.*

Korollar 7.18 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \dfrac{-1}{2}$

Definition 7.19 (Tangens, Cotangens)

$\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *für* $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\quad \cot x := \dfrac{\cos x}{\sin x}$ *für* $x \neq k\pi$

7.5 Arcusfunktionen

$$\begin{array}{rrll} \sin x: & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to [-1,1] & \text{streng wachsend und stetig,} \\ \cos x: & [0,\pi] & \to [-1,1] & \text{streng fallend und stetig} \end{array}$$

Umkehrfunktionen

$$\begin{array}{rll} \arcsin x: & [-1,1] & \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arccos x: & [-1,1] & \to [0,\pi] \end{array}$$

$$\begin{array}{rrll} \tan x: & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \to \mathbb{R} & \text{streng wachsend und stetig,} \\ \cot x: & (0,\pi) & \to \mathbb{R} & \text{streng fallend und stetig} \end{array}$$

Umkehrfunktionen

$$\begin{array}{rll} \arctan x: & \mathbb{R} & \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \operatorname{arccot} x: & \mathbb{R} & \to (0,\pi) \end{array}$$

7.6 Hyperbelfunktionen

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{(Sinus Hyperbolicus)}$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{(Cosinus Hyperbolicus)}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}; \ \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

7.7 Areafunktionen

Aufgrund von Monotonie besitzen die Hyperbelfunktionen folgende Umkehrfunktionen:

Funktion	Umkehrfunktion
$\sinh x$	$\operatorname{Arsinh} x$ (Areasinushyperbolicus)
$\cosh x\vert_{[0,\infty)}$	$\operatorname{Arcosh} x$
$\tanh x$	$\operatorname{Artanh} x$
$\coth x$	$\operatorname{Arcoth} x$

Lemma 7.20

a) $\operatorname{Arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

b) $\operatorname{Arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, *falls* $x > 1$

c) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \ln(\frac{1+x}{1-x})$, *falls* $|x| < 1$

d) $\operatorname{Arcoth} x = \frac{1}{2} \ln(\frac{x+1}{x-1})$, *falls* $|x| > 1$

8 Komplexe Zahlen

Definition 8.1

Auf $\mathbb{R}^2 = \{(a,b); a,b \in \mathbb{R}\}$ *wird eine Addition und eine Multiplikation wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d)\\ (a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc)\end{aligned}$$

$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *ist ein Körper (Körper der komplexen Zahlen)*

$\mathbb{R} = \{(a,0), a \in \mathbb{R}\}$ *wird als Unterkörper von* $\mathbb{C}$ *aufgefasst, denn*

$$(a,0)+(c,0) = (a+c,0), \quad (a,0)\cdot(c,0) = (a\cdot c, 0)$$

Konvention: $(a,0) = a$. *Definiere* $\imath := (0,1)$.

Sei $z = (a,b) \in \mathbb{C}$. *Wegen* $(a,b) = (a,0) + (0,1)\cdot(b,0)$ *schreibt man:*

$$z = (a,b) = a + \imath b$$

$a = \operatorname{Re} z$ *heisst Realteil von* z, $b = \operatorname{Im} z$ *heisst Imaginärteil von* z

$\overline{z} = \overline{(a,b)} = a - \imath b$ *(zu* z *komplex konjugierte Zahl)*

$|z| := \sqrt{a^2+b^2}$ *(Betrag einer komplexen Zahl* z*)*

Lemma 8.2 (Recheneregeln für komplexe Zahlen)

1) $\imath \cdot \imath = (0,1)\cdot(0,1) = -1$
2) $(a+\imath b)\cdot(c+\imath d) = ac - bd + \imath(ad+bc)$
3) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$
4) $z = a + \imath b;\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \imath\dfrac{-b}{a^2+b^2}$
5) $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}; \operatorname{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\imath}$
6) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w};\ \overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w};\ \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
7) $|z+w| \le |z| + |w|$

8) $|z \cdot w| \leq |z| \cdot |w|$

9) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

Definition 8.3

Ein komplexes Polynom ist eine Abbildung $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *der Form* $P(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j$ *mit Koeffizienten* $\alpha_j \in \mathbb{C}, j = 0, ..., n$. *Man nennt* n *den Grad von* P, *falls* $\alpha_n \neq 0$.

Satz 8.4 (Fundamentalsatz der Algebra) *Ein komplexes Polynom vom Grad* n $(n \geq 1)$ *besitzt genau* n *komplexe Nullstellen.*

8.1 Folgen

Definition 8.5 (Konvergente Folgen) *Ein Folge* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *komplexer Zahlen konvergiert gegen* $\alpha \in \mathbb{C}$ *falls gilt*

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_n - \alpha| = 0.$$

In Symbolen: $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

Lemma 8.6 *Es gelte* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. *Dann folgt:*

(a) $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \beta$, $\quad \lim_{n\to\infty} (\alpha_n \cdot \beta_n) = \alpha \cdot \beta$, $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha}{\beta}$, *falls* $\beta \neq 0$,

(b) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = |\alpha|$, $\quad \lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot \alpha_n) = \lambda \cdot \alpha$ *für* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lemma 8.7 *Sei* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *eine Folge komplexer Zahlen und* $a_n = \operatorname{Re} \alpha_n, b_n = \operatorname{Im} \alpha_n$. *Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha = a + ib \iff \lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Beweis: $|a_n - a|, |b_n - b| \leq |\alpha_n - \alpha| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$.■

Definition 8.8 (Beschränkte Folgen) *Eine Folge* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *komplexer Zahlen heißt beschränkt, falls* $K > 0$ *existiert mit*

$$|\alpha_n| \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Definition 8.9 (Häufungswert) *$\alpha \in \mathbb{C}$ heißt Häufungswert der Folge $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ komplexer Zahlen, falls zu jedem $\epsilon > 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\mid \alpha_n - \alpha \mid < \ \epsilon.$$

Satz 8.10 (Bolzano-Weierstrass) *Sei $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen. Dann besitzt $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ einen Häufungswert.*

Definition 8.11 (Cauchy-Folge) *Eine Folge $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ komplexer Zahlen heißt Cauchy-Folge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt:*

$$n, m \geq N \Longrightarrow \mid \alpha_n - \alpha_m \mid < \ \epsilon.$$

Satz 8.12 *Sei $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann gilt: $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\Longleftrightarrow$ $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ ist Cauchy-Folge.*

8.2 Reihen

Definition 8.13 (Unendliche Reihen) *Sei $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Für $k \geq 0$ heißt*

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} \alpha_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$$

k-te Teilsumme. Die Folge der Teilsummen $(s_k)_{k\geq 0}$ heißt unendliche Reihe mit Gliedern α_n. Die unendliche Reihe heißt konvergent, falls die Folge $(s_k)_{k\geq 0}$ der Teilsummen konvergiert. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ heisst absolut konvergent, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|$ konvergiert.

Satz 8.14 *$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ seien konvergent. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)$ konvergent und*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n + \mu \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n.$$

Satz 8.15 (Wurzel- und Quotientenkriterium) *Sei* $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$.

a) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *absolut konvergent.*

b) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|} > 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *divergent.*

c) $\alpha_n \neq 0$ *für grosse* n *und* $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *absolut konvergent.*

d) $\alpha_n \neq 0$ *für grosse* n *und* $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| > 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *divergent.*

Für absolut konvergente Reihen gelten der Umordnungssatz 5.16 und der Multiplikationssatz 5.21.

8.3 Funktionen

$B_r(\zeta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < r\}$ heisst (offene) Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ um $\zeta \in \mathbb{C}$.

Definition 8.16 (Häufungspunkt, isolierter Punkt) *Sei* $D \subset \mathbb{C}$.

a) $\zeta \in \mathbb{C}$ *heißt Häufungspunkt von* D*, wenn in jeder Kreisscheibe* $B_\epsilon(\zeta)$, $\epsilon > 0$*, unendlich viele Punkte von* D *liegen.*

b) $\zeta \in D$ *heißt isolierter Punkt von* D*, wenn* ζ *kein Häufungspunkt von* D *ist. In diesem Fall ex.* $\delta > 0$*, sodass gilt* $B_\delta(\zeta) \cap D = \{\zeta\}$.

Definition 8.17 (Grenzwert) *Sei* $f : D \to \mathbb{C}$ *eine Funktion und* $\zeta \in \mathbb{C}$ *sei Häufungspunkt von* D*. Man sagt:* f *strebt gegen* $\alpha \in \mathbb{C}$ *für* $z \to \zeta$*, falls zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit der Eigenschaft*

$$|z - \zeta| < \delta,\ z \in D \setminus \{\zeta\} \Longrightarrow |f(z) - \alpha| < \epsilon.$$

In Symbolen: $\lim_{z\to\zeta} f(z) = \alpha$ *oder* $f(z) \to \alpha$ *für* $z \to \zeta$.

Definition 8.18 (Stetigkeit) *Sei* $f : D \to \mathbb{C}$ *eine Funktion und* $\zeta \in D$*.* f *heißt stetig an der Stelle* ζ*, falls zu jedem* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit der Eigenschaft*

$$|z - \zeta| < \delta,\ z \in D \Longrightarrow |f(z) - f(\zeta)| < \epsilon$$

Ist $\zeta \in D$ Häufungspunkt so gilt: f ist stetig an der Stelle $\zeta \Longleftrightarrow \lim_{z\to\zeta} f(z) = f(\zeta)$.

Satz 8.19 (Folgenkriterium) *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\zeta \in \mathbb{C}$ sei Häufungspunkt von D. Dann gilt*

a) $\lim_{z\to\zeta} f(z) = \alpha \Longleftrightarrow$ *für jede Folge* $(z_n) \subset D \setminus \{\zeta\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$.

b) f *stetig in* $\zeta \in D \Longleftrightarrow$ *für jede Folge* $(z_n) \subset D$ *mit* $\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta \in D$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\zeta)$.

Für Grenzwerte gelten die Rechenregeln (a), (b), (c) aus Lemma 6.9.
Die Komposition stetiger Funktion ist wieder stetig; vgl. Satz 6.12.

Definition 8.20 (Punktweise, gleichmäßige Konvergenz) *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$.*

(a) $(f_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert punktweise auf D gegen f falls für alle $z \in D$ gilt:* $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$.

(b) $(f_n)_{n\geq 1}$ *konvergiert gleichmäßig auf D gegen f falls gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ exisitert ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ für alle $z \in D$ und alle $n \geq N$.*

Es gilt das Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz, vgl. Satz 7.3.

Satz 8.21 *Sei $D \subset \mathbb{C}$. Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ konvergiere gleichmäßig auf D gegen die Funktion f. Falls jede Funktion f_n an der Stelle $\zeta \in D$ stetig ist, so ist f stetig an der Stelle ζ.*

Definition 8.22 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ heisst gleichmäßig auf D konvergent, falls die Folge $(s_k)_{k\geq 0}$ der k-ten Teilsummen, definiert durch $s_k(z) := \sum_{n=0}^{k} f_n(z)$, gleichmäßig auf D konvergiert.*

Satz 8.23 (Weierstraßsches Majorantenkriterium) *Sei $D \subset \mathbb{C}$, $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ und $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|f_n(z)| \leq a_n$ für alle $z \in D$ und alle $n \geq 0$. Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ gleichmäßig auf D.*

8.4 Potenzreihen

Definition 8.24 (Komplexe Potenzreihen) *Sei $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann heisst die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ Potenzreihe (in der komplexen Variablen $z \in \mathbb{C}$).*

Gelegentlich werden auch Potenzreihen in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-\zeta)^n$ betrachtet. Dabei ist $\zeta \in \mathbb{C}$ fest.

Satz 8.25 (Konvergenzsatz) *Gegeben sei die komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$.*

Sei $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}$ und $r := \frac{1}{L}$. Dann gilt:

(a) Die Reihe konvergiert absolut auf der Kreisscheibe $B_r(0)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ ist stetig auf $B_r(0)$.

(b) Die Reihe divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$.

(c) Für $0 < s < r$ konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $D_s = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq s\}$.

(d) Falls $\alpha_n \neq 0$ für große n und falls $\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|}$ existiert (∞ zugelassen), so gilt $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n+1}|}$.

r heisst **Konvergenzradius** *der Potenzreihe.*

8.5 Komplexe Exponentialfunktion

$$\left.\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}\right\} \quad \text{absolut konvergent für alle } z \in \mathbb{C}, \text{ Konvergenzradius } r = \infty$$

Lemma 8.26

a) $e^z e^w = e^{z+w} \ \forall z, w \in \mathbb{C}$

b) $e^{\imath z} = cos z + \imath \sin z$, *insbesondere* $e^{\imath\pi} = -1$

c) Für $t \in \mathbb{R}$ *ist* $|e^{\imath t}| = 1$

d) Die Abbildung $\left\{ \begin{array}{rcl} [0, 2\pi) & \rightarrow & \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \\ t & \mapsto & e^{\imath t} \end{array} \right.$ *ist bijektiv*

Definition 8.27 (Polarkoordinaten)

Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Dann existiert genau ein* $t \in [0, 2\pi)$ *mit* $z = |z|e^{\imath t}$ *und* $t = \arg z$ *heisst Argument von* z*.*

Lemma 8.28 (Multiplikation komplexer Zahlen)

Sei $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = |z|e^{\imath \arg z}$; $w = |w|e^{\imath \arg w}$*. Dann gilt:* $zw = |z||w|e^{\imath(\arg z + \arg w)}$*, d.h. die Längen multiplizieren sich und die Winkel addieren sich.*

Lemma 8.29 (Additionstheoreme)

$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

Definition 8.30 (Komplexe Hyperbelfunktionen)

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Es gilt: $\sinh(\imath z) = \imath \sin z$ und $\cosh(\imath z) = \cos z$

9 Differentiation

9.1 Differenzenquotient, Ableitung

Definition 9.1 *Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt an der Stelle $\xi \in I$ differenzierbar, falls $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ existiert (gleichbedeutend: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ existiert). Der Wert des Limes heißt Ableitung von f an der Stelle ξ.*
In Symbolen: $f'(\xi)$ bzw. $\frac{df}{dx}(\xi)$
Geometrische Bedeutung: Tangentensteigung der Kurve $(x, f(x))$ im Punkt $(\xi, f(\xi))$.

Beispiele:

a) $f(x) = e^x$; $\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \frac{e^{\xi+h}-e^{\xi}}{h} = \frac{e^{\xi}\cdot(e^h-1)}{h} \overset{h\to 0}{\to} e^{\xi}$

b) $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}\frac{\sin(\xi+h)-\sin\xi}{h} &= \frac{\sin\xi\cos h+\cos\xi\sin h-\sin\xi}{h}\\ &= \sin\xi\frac{\cos h-1}{h}+\cos\xi\frac{\sin h}{h} \overset{h\to 0}{\to} \cos\xi\end{aligned}$$

c) $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$

$$\begin{aligned}\frac{(\xi+h)^n-\xi^n}{h} &= \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k\xi^{n-k}-\xi^n\\ &= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k\xi^{n-k} \overset{h\to 0}{\to} \binom{n}{1}\xi^{n-1} = n\xi^{n-1}\end{aligned}$$

Definition 9.2 (Einseitige Differenzierbarkeit) *Sei $\delta > 0$.*

a) $f : [\xi, \xi+\delta] \to \mathbb{R}$. Dann heißt $f'_+(\xi) = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}$ rechtsseitige Ableitung von f an der Stelle ξ, falls der Limes existiert.

b) $f : [\xi - \delta, \xi] \to \mathbb{R}$. *Dann heißt* $f'_-(\xi) = \lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$ *linksseitige Ableitung von* f *an der Stelle* ξ*, falls der Limes existiert.*

Definition 9.3 *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *Intervall und* $f : I \to \mathbb{R}$.

a) f *heißt auf* I *differenzierbar, wenn* $f'(\xi)$ *für alle* $\xi \in I$ *existiert. In Randpunkten müssen nur die einseitige Ableitungen existieren.*

b) $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$ *heißt Ableitungsfunktion von* f.

c) f *heißt stetig differenzierbar auf* I*, falls* f' *auf* I *existiert und stetig ist. In Symbolen:* $f \in C^1(I)$.

Im Folgenden sei I ein beliebiges Intervall.

Satz 9.4 (Eigenschaften der Ableitung) *Sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *an der Stelle* $\xi \in I$ *differenzierbar. Dann gilt:*

a) Es existiert $K > 0,\ \delta > 0$ *mit*

$$|f(x) - f(\xi)| \leq K|x - \xi| \ \forall x \in I \text{ mit } |x - \xi| \leq \delta.$$

b) f *ist stetig an der Stelle* ξ.

c) Ist $f'(\xi) > 0$*, so gibt es ein* $h_0 > 0$ *mit*

$$f(\xi - h) < f(\xi) < f(\xi + h), \text{ falls } 0 < h \leq h_0.$$

d) Ist $f'(\xi) < 0$*, so gibt es ein* $h_0 > 0$ *mit*

$$f(\xi - h) > f(\xi) > f(\xi + h), \text{ falls } 0 < h \leq h_0.$$

Ist ξ *Randpunkt von* I*, so gilt in c), d) jeweils nur eine der beiden Ungleichungen.*

Korollar 9.5 *Sei* $\delta > 0$ *und* $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$ *sei in* ξ *differenzierbar und besitze ein Minimum oder Maximum an der Stelle* ξ*. Dann ist* $f'(\xi) = 0$.

Satz 9.6 (Äquivalente Charakterisierung der Ableitung)

Sei $\delta > 0$ *und* $f : (\xi - \delta, \xi + \delta) \to \mathbb{R}$ *eine Funktion. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} f \textit{ ist differenzierbar in } \xi \Leftrightarrow\ & \exists\, c \in \mathbb{R} \textit{ und eine Funktion } \eta : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R} \textit{ mit} \\ & f(\xi + h) = f(\xi) + c \cdot h + \eta(h) \cdot h \textit{ und } \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0. \\ & \textit{In diesem Fall gilt } f'(\xi) = c. \end{aligned}$$

9.2 Rechenregeln für Ableitungen

Satz 9.7 *Seien* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *an der Stelle* $\xi \in I$ *differenzierbar. Dann sind* $f + g$, $\lambda \cdot f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$ *an der Stelle* ξ *differenzierbar und es gilt:*

$$(f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi),\ (\lambda \cdot f)'(\xi) = \lambda \cdot f'(\xi),\ (f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi)$$

Ist $g(\xi) \neq 0$ *so ist* $\frac{f}{g}$ *an der Stelle* ξ *differenzierbar mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g(\xi)^2}.$$

Satz 9.8 (Kettenregel) *Seien* $I, J \subset \mathbb{R}$ *Intervalle,* $f : I \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $f(I) \subset J$ *und es sei die Funktion* $h : I \to \mathbb{R}$ *gegeben durch* $h := g \circ f$*. Dann gilt: ist* f *an der Stelle* $\xi \in I$ *differenzierbar und* g *an der Stelle* $\eta = f(\xi)$ *differenzierbar, dann ist* h *an der Stelle* ξ *differenzierbar mit:*

$$h'(\xi) = g'(f(\xi)) \cdot f'(\xi)$$

Satz 9.9 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig und streng monoton und* $\xi \in I$*. Falls* $\Phi = f^{-1} : f(I) \to I$ *an der Stelle* $\eta = f(\xi)$ *differenzierbar ist mit* $\Phi'(\eta) \neq 0$*, so ist* f *an der Stelle* ξ *differenzierbar und es gilt:*

$$f'(\xi) = \frac{1}{\Phi'(f(\xi))}$$

Definition 9.10

$f : I \to \mathbb{R}$ *sei differenzierbar und* $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$ *sei die Ableitungsfunktion.*

Falls f' an der Stelle ξ differenzierbar ist, so heißt $\frac{df'}{dx}(\xi)$ die zweite Ableitung von f an der Stelle ξ. In Symbolen: $f''(\xi)$ bzw. $\frac{d^2 f}{dx^2}(\xi)$

Analog: $f''' = (f'')'$, $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, etc., $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}, n \geq 1$

Ist $f^{(n)}$, $n \geq 1$, stetig, so heisst f n-mal stetig differenzierbar. Schreibweise: $f \in C^n(I)$.

Zusatz: $C^0(I) = C(I) =$ Menge der stetigen Funktionen auf I

$C^\infty(I) = \bigcap\limits_{n \geq 1} C^n(I) =$ Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf I

9.3 Mittelwertsatz und Folgerungen

Satz 9.11 (Satz von Rolle)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a,b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$ ist, dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz 9.12 (Mittelwertsatz)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz 9.13 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall.

a) $f' = 0$ in $I \Rightarrow f$ konstant

b) $|f'(x)| \leq L\ \forall x \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\ \forall x, y \in I$

c) $f' \geq 0$ in $I \Rightarrow f$ monoton wachsend

d) $f' \leq 0$ in $I \Rightarrow f$ monoton fallend

e) $f' > 0$ in $I \Rightarrow f$ streng monoton wachsend

f) $f' < 0$ in $I \Rightarrow f$ streng monoton fallend

Anwendungen:

a) Für $x \geq 0$ ist $\sin x \geq x$, denn für $x \geq 0$ gilt: $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos \xi \leq 1$ für ein $\xi \in (0, x)$.

b) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ (mit Folgerung b, siehe oben)

c) $|\sinh x - \sinh y| \geq |x - y|$, denn für $x < y$ gilt $\dfrac{\sinh x - \sinh y}{x - y} = \cosh \xi \geq 1$ für ein $\xi \in (x, y)$.

Satz 9.14 (Regel von Bernoulli-L'Hôspital)

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$.

Voraussetzung: *Es gelte*

entweder:

a) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = 0$

oder:

b) $\lim\limits_{x \to a+} g(x) = +\infty$ *oder* $-\infty$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der zweite Limes im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existiert.

Zusatz:

a) $a = \infty$ *ist zugelassen.*

b) Die Aussagen gelten auch für $\lim\limits_{x \to b-}$ *und* $b = \infty$ *ist zugelassen.*

Beispiele:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{1}{x \ln x}}{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{\sqrt{\ln x}} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin x}{2x} = -\dfrac{1}{2}$

10 Das Riemannsche Integral

Es sei stets $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Für Intervalle $J = [x, y]$ sei $|J| = y - x$ die Länge von J.

10.1 Ober- und Untersummen

Definition 10.1 *Sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.*

a) Gegeben seien endliche viele Punkte $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, die I in die Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ zerlegen.

$Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ heißt Zerlegung von I,

$|Z| = \max\limits_{k=0,\ldots,n} |I_k|$ heißt Feinheitsmaß von Z.

b) Seien $m_k = \inf\limits_{I_k} f, M_k = \sup\limits_{I_k} f$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$s(Z) = s(Z, f) := \sum_{k=1}^{n} m_k |I_k| \text{ Untersumme}$$

$$S(Z) = S(Z, f) := \sum_{k=1}^{n} M_k |I_k| \text{ Obersumme}$$

Beachte: aus $|f(x)| \leq K \ \forall x \in I$ folgt $-K(b - a) \leq s(Z),\ S(Z) \leq K(b - a)$

c) Seien Z, Z' Zerlegungen von I. Z heißt Verfeinerung von Z', wenn Z jeden Teilpunkt von Z' enthält. In Zeichen: $Z' < Z$.

$\tilde{Z} = Z + Z'$ bezeichnet diejenige Zerlegung von I, die alle Teilpunkte von Z, Z' enthält.

Lemma 10.2 *Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K \ \forall x \in I$. Sei Z' Zerlegung von I mit $p \in \mathbb{N}$ inneren Punkten und Z beliebige Zerlegung von I. Dann gilt:*

$$s(Z) \leq s(Z + Z') \leq s(Z) + 2pK|Z|$$
$$S(Z) \geq S(Z + Z') \geq S(Z) - 2pK|Z|$$

Korollar 10.3 *Seien Z, Z' beliebige Zerlegungen. Dann gilt $s(Z) \leq S(Z')$.*

10.2 Definition des Riemannschen Integrals

Definition 10.4 *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt*

a) $J_* = J_*(f) = \sup_Z s(Z) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ *unteres Riemannsches Integral*

b) $J^* = J^*(f) = \inf_Z S(Z) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ *oberes Riemannsches Integral,*

wobei Infimum und Supremum über alle Zerlegungen Z von I gebildet werden.

Lemma 10.5 *Es gilt $J_*(f) \le J^*(f)$.*

Definition 10.6 *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. f heißt Riemann-integrierbar auf I, falls $J^*(f) = J_*(f)$. Der gemeinsame Wert heißt Riemann-Integral von f über I und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.*

$R([a,b])$ = Menge der auf $[a,b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen.

Satz 10.7 *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (Zerlegungsnullfolge). Dann gilt:*

$$J_* = \lim_{n\to\infty} s(Z_n),\ J^* = \lim_{n\to\infty} S(Z_n)$$

Beispiele:

$I = [a,b],\ Z_n = (a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh = b),\ h = \frac{b-a}{n}$ (äquidistante Zerlegung)

a) $f(x) = x,\ m_k = a + (k-1)h,\ M_k = a + kh$

$$s(Z_n) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} \Big(a + (k-1)h\Big) = nha + h^2 \frac{n(n-1)}{2} = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2}$$
$$\overset{n\to\infty}{\to} \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$S(Z_n) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} (a + kh) = nha + n^2 \cdot \frac{n(n+1)}{n^2} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{b^2-a^2}{2}$$
$$\Rightarrow \int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$$

b) $f(x) = x^2,\ a = 0$

$$s(Z_n) = h^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = h^3 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = h^3 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{b^3}{3}$$

$$S(Z_n) = h^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = h^3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{b^3}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

Satz 10.8 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

Sie $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:

f ist auf I integrierbar $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists$ Zerlegung Z mit $S(Z) - s(Z) < \epsilon$

Satz 10.9 (Klassen integrierbarer Funktionen)

Folgende Klassen von Funktionen $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar

a) f ist monoton

b) f ist auf $[a,b]$ beschränkt und mit Ausnahme höchstens endlich vieler Punkte stetig.

10.3 Riemannsche Zwischensummen

Definition 10.10 *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Wird aus jedem Intervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ein Punkt ξ_k ausgewählt, so heißt $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ Zwischenvektor und*

$$\sigma(Z,\xi,f) = \sigma(Z,\xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k|$$

heißt Riemannsche Zwischensumme.

Beachte: $s(Z) \leq \sigma(Z,\xi) \leq S(Z)$

Lemma 10.11 *Sei Z beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existieren Zwischenvektoren ξ, η, sodass gilt:*

$$s(Z) \leq \sigma(Z,\xi) \leq s(Z) + \epsilon$$
$$S(Z) \geq \sigma(Z,\xi) \geq S(Z) - \epsilon$$

Satz 10.12 (Charakterisierung des Integrals mittels Zwischensummen) *Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

$$f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \forall \textit{Zerlegungsnullfolge } Z_n \textit{ mit Zwischenvektor } \xi^n \textit{ konvergiert } \sigma(Z_n, \xi^n).$$
$$\textit{In diesem Fall gilt } \lim_{n\to\infty} \sigma(Z_n, \xi^n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Beispiel:

Für $\alpha \neq -1$ und $0 < a < b$ gilt $\displaystyle\int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

<u>Beweis:</u> $Z_n = (a, aq, aq^2, \ldots, aq^n),\ q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},\ \xi^n = (a, aq, \ldots, aq^{n-1})$

$$\sigma(Z_n, \xi^n) = \sum_{k=1}^{n} (aq^{k-1})^\alpha a(q^k - q^{k-1}) = a^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{n-1} q^{k(\alpha+1)}(q-1) = (q-1)a^{\alpha+1} \frac{q^{(\alpha+1)n} - 1}{q^{\alpha+1} - 1}$$
$$= \frac{q-1}{q^{\alpha+1} - 1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

10.4 Eigenschaften des Riemannschen Integrals

Definition 10.13 (Integral für komplexwertige Funktionen)

Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{C}$ beschränkt, d.h. $|f(x)| \leq K\ \forall x \in I$. Sei $g(x) = \operatorname{Re} f(x),\ h(x) = \operatorname{Im} f(x)$, d.h. $f(x) = g(x) + \imath h(x)$. f heißt Riemann-integrierbar auf I, falls g, h Riemann-integrierbar auf I sind. Man definiert:

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b g(x)dx + \imath \int_a^b h(x)dx$$

Satz 10.14 (Linearität des Integrals)

Seien $f, g \in R(I)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f + \beta g \in R(I)$ und es gilt:

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Satz 10.15 (Eigenschaften des Integrals)

Sei $I = [a, b]$ und seien $f, g \in R(I)$ beschränkt mit $|f(x)|, |g(x)| \leq K \; \forall x \in I$. Dann gilt:

a) *Ist $\Phi : [-K, K] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so folgt $\Phi \circ f \in R(I)$.*
b) *$|f|, f^+, f^-, f^2 \in R(I)$. Falls $\inf_I |f| > 0$, damit ist $\frac{1}{f} \in R(I)$.*
c) *$f \cdot g,\; \max(f, g),\; \min(f, g) \in R(I)$*
d) *Ist $f = h$ auf $I \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}, p \in \mathbb{N} \Rightarrow h \in R(I)$ und $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx$.*

Satz 10.16 (Monotonie des Integrals)

$f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ seien beschränkt und $f \leq g$ auf I. Dann gilt:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)dx \text{ und } \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} g(x)dx$$

Falls $f, g \in R(I)$, so gilt dasselbe für das Riemann-Integral.

Satz 10.17 (Dreiecksungleichung)

Für $f \in R(I)$ gilt:

$$\Big| \int_a^b f(x)dx \Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

<u>Bemerkung:</u> *Satz 10.17 gilt auch für komplexwertige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$.*

Satz 10.18 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $I = [a, b]$, $f \in R(I)$ und $\mu(f) := \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (Mittelwert von f auf I). Dann gilt:

$$\inf_I f(x) \leq \mu \leq \sup_I f(x).$$

Falls $f \in C(I)$, dann existiert $\xi \in I$ mit $\mu(f) = f(\xi)$, d.h. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$.

10.5 Integration über Teilintervalle

Satz 10.19 *Sei $a < c < b$ und $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt:*

$$f \in R([a,b]) \Leftrightarrow f \in R([a,c]) \text{ und } f \in R([c,b])$$

Es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Definition 10.20 *Sei $a < b$ und $f \in R([a,b])$. Definiere*

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx \text{ und } \int_c^c f(x)dx = 0 \ \forall c \in [a,b].$$

Bemerkung:

a) Ist $f \in R([a,b])$, dann ist f auf jedem Intervall $[a,x]$, $a < x \leq b$ integrierbar.

b) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ gilt dann:

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx$$

Satz 10.21 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

a) Sei $f \in R([a,b])$, $c \in [a,b]$ und $F(x) := \int_c^x f(t)dt$. Ist f stetig an der Stelle $\xi \in [a,b]$, so ist F differenzierbar an der Stelle ξ und es gilt $F'(\xi) = f(\xi)$. (Rekonstruktion von f durch Ableitung des Integrals)

b) Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $F' \in R([a,b])$. Dann gilt für $x, c \in [a,b]$

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(t)dt$$

(Rekonstruktion von F durch die Integration der Ableitung)

Praktische Bedeutung:

a) Gesucht ist die Lösung der "Differentialgleichung" $u'(t) = a(t)u(t)$ mit der "Anfangsbedingung" $u(0) = 1$. Dabei sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

Idee: $u(t) := e^{A(t)}$. Dann muss gelten $A'(t) = a(t),\ A(0) = 0$. Also: $A(t) = \displaystyle\int_0^t a(s)ds$.

Die Lösung der Differentialgleichung ist dann: $u(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}$

b) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan b - \arctan a$, denn $\Big(\arctan x\Big)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

10.6 Integrationstechniken

Definition 10.22 *Gegeben sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ heißt Stammfunktion von f.*

Bemerkung:

a) Der 1.Hauptsatz besagt: stetige Funktion besitzen Stammfunktionen, nämlich z.B. $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt\ , x \in [a,b]$

b) jede weitere Stammfunktion unterscheidet sich von F um eine Konstante

c) Schreibweise für Stammfunktionen: $F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$

d) falls f eine Stammfunktion F besitzt und $f \in R(I)$, dann gilt wegen des 2. Hauptsatzes

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Liste der Grundintegrale

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \text{ für } \left\{ \begin{array}{cc} x > 0, & \alpha \neq -1 \\ x \in \mathbb{R}, & \alpha \in \mathbb{N}_0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, & \alpha \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\} \end{array} \right. , \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|, x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{Artanh} x = \ln\frac{1+x}{1-x} & x \in (-1,1) \\ \operatorname{Arcoth} x = \ln\frac{x+1}{x-1} & |x| > 1 \end{array} \right.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x, \ |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{Arsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right|, \ |x| > 1$$

$$\int e^x dx = e^x, \ \int \sin x \, dx = -\cos x, \ \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x|, \ \int \cot x \, dx = \ln|\sin x|$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$$

Partielle Integration

Seien $f, g \in C^1(J)$. Dann gilt:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Für $a, b \in J$ gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Satz 10.23 (Substitutionsregel) *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle.*

a) Sei $f \in C(J), \Phi \in C^1(I)$ und $\Phi(I) \subset J$. Für $a, b \in J$ gilt dann:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\Phi'(t)dt, \ a = \Phi(\alpha), \ b = \Phi(\beta)$$

b)

$$\int f(x)dx = \int f(\Phi(t))\Phi'(t)dt|_{t=\Phi^{-1}(x)},$$

wobei hier vorausgesetzt werden muss, dass Φ streng monoton ist.

Beispiele:

a) Zur Berechnung von $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$ verwende folgenden Trick:

$$\Phi(t) = 2\arctan(t);\ ”x = 2\arctan(t)”;\ ”dx = \frac{2}{1+t^2}dt”;$$
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\Phi'(t)dt}{\sin\Phi(t)} = \int \frac{2(1+t^2)}{(1+t^2)2t}dt = \ln|t| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$$

10.7 Integration rationaler Funktionen

Satz 10.24 (Partialbruchzerlegung)

Seien P, Q reelle Polynome und

$Q(x) = (x-\xi_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-\xi_k)^{p_k}\cdot(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{r_l}$.

Dann hat die rationale Funktion $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ die Darstellung (Partialbruchzerlegung):

$$R(x) = P_0(x) + \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_{i1}}{(x-\xi_i)} + \ldots + \frac{a_{ip_i}}{(x-\xi_i)^{p_i}}\right) + \sum_{j=1}^{l}\left(\frac{b_{j1}x+c_{j1}}{(x^2+\alpha_j x+\beta_j)} + \ldots + \frac{b_{jr_j}x+c_{jr_j}}{(x^2+\alpha_j x+\beta_j)^{r_j}}\right)$$

mit $a_{ip},\ b_{jr},\ c_{jr} \in \mathbb{R}$ und einem reellen Polynom P_0.

Folgerung: Rationale Funktionen, bei denen die Nennerfaktorisierung bekannt ist, haben explizite Stammfunktionen. Gemäß Satz 10.24 treten nur Stammfunktionen von Summanden der folgenden Form auf:

$\dfrac{1}{(x-\xi)^m};\ \dfrac{bx+c}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$ mit $\alpha^2 < 4\beta$ (ansonsten hätte $(x^2+\alpha x+\beta)$ 2 reelle Nullstellen)

$$\int \frac{dx}{(x-\xi)^m} = \begin{cases} \ln|x-\xi| & ,\ m=1 \\ \frac{1}{(1-m)}\frac{1}{(x-\xi)^{m-1}} & ,\ m\geq 2 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta} = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}} \arctan\Big(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\Big)$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+\alpha x+\beta} = \frac{1}{2}\ln(x^2+\alpha x+\beta) - \frac{\alpha}{2}\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta}$$

$m \geq 2:$

$$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} = \frac{2x+\alpha}{(m-1)(4\beta-\alpha^2)(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4\beta-\alpha^2)}\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+\alpha x+\beta)^m} = \frac{-1}{2(m-1)(x^2+\alpha x+\beta)^{m-1}} - \frac{\alpha}{2}\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^m}$$

(Verifizierung durch Differentiation)

10.8 Vertauschung von Integration/Differentiation mit Limesbildung

Satz 10.25 *Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen aus $R([a,b])$. Falls $f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert, dann ist $f \in R([a,b])$ und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Korollar 10.26 *Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen aus $R([a,b])$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert, so gilt:*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Beispiel:

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ konvergiert gleichmäßig für $0 \leq |x| \leq \rho$, falls $0 < \rho < 1$.

$$\int_0^x \frac{ds}{1+s} = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n s^n ds = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},\ |x|<1$$

(hier wurde somit die Potenzreihendarstellung des Logarithmus hergeleitet)

Satz 10.27 (Vertauschung von Ableitung und Limes)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Funktionen in $C^1(I)$. Falls $f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ punktweise auf I konvergiert und $f_n' \underset{n\to\infty}{\to} g$ gleichmäßig auf I konvergiert, dann ist $f \in C^1(I)$ und $f' = g$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)'.$$

Korollar 10.28

a) *Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $C^1(I)$. Falls $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ punktweise auf I konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ gleichmäßig auf I konvergiert, dann ist $f \in C^1(I)$ und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \ \forall x \in I.$$

b) *Sei $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist $f \in C^1(-r, r)$ und $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Gleiches gilt für höhere Ableitungen.*

10.9 Taylor-Reihe, Taylor-Polynom

Beobachtung:

$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ für $|x-a| < r$

Dann gilt: $f(a) = a_0,\ f'(a) = a_1,\ f''(a) = 2a_2, \ldots,\ f^{(k)}(a) = k! a_k$,

d.h. $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1)}$

Frage: Falls $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$ ∞-oft differenzierbar ist, gilt dann (1)?

Definition 10.29 *Sei $r > 0$ und $f : (a-r, a+r) \to \mathbb{R}$.*

a) Ist f ∞-oft differenzierbar, dann heißt $T(x,a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ Taylor-Reihe von f im Punkt a.

b) Ist $k \in \mathbb{N}_0$ und f k-mal differenzierbar, so heißt $T_k(x,a) := \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ k-tes Taylor-Polynom von f im Punkt a.

Satz 10.30 (Satz von Taylor) *Sei $a \in I$, $f \in C^{n+1}(I)$. Dann gilt für alle $x \in I$:*

$$f(x) = T_n(x,a) + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt}_{\text{Restglied } R_n(x,a)}$$

Es existiert ξ zwischen a und x mit:

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \text{ (Lagrange-Form des Restglieds)}$$

Satz 10.31 (Taylor-Entwicklung von Funktionen)

Sei $f \in C^\infty(I)$ und $a \in I$. Falls $R_n(x,a) \to 0$ für $n \to \infty$, dann gilt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Dies ist z.B. der Fall, wenn Zahlen $\alpha, c > 0$ existieren mit $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq \alpha c^n \ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I$.

Beispiele:

a) $f(x) = e^x,\ a = 0,\ f^{(n)}(t) = e^t$

Für $t \in [-L, L],\ |f^{(n)}(t)| \leq e^L$. $\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Es gilt: $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Insbesondere ist f ∞-oft differenzierbar an der Stelle $x = 0$ mit $f^{(n)}(0) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Folglich gilt für die Taylor-Reihe $T(x,0) \equiv 0$, d.h. f wird nicht durch seine Taylor-Reihe $T(x,0)$ dargestellt.

10.10 Uneigentliche Integrale

Beispiele:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}|_0^t = 1$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0+} 2\sqrt{x}|_t^1 = 2$

Definition 10.32 *Die Funktion $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ sei auf jedem Intervall $[a,c],\ c > a$ integrierbar. Man definiert*

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx,$$

falls dieser Limes existiert. In diesem Fall heißt $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent.

Bemerkungen:

a) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$

b) $\displaystyle\int_a^\infty \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)dx = \alpha\int_a^\infty f(x)dx + \beta\int_a^\infty g(x)dx$

c) $\displaystyle F(c) := \int_a^c f(t)dt$. Falls das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konvergiert, so gilt

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{c\to\infty} F(c).$$

Lemma 10.33 (Konvergenzkriterien) *Seien $f, g \in R([a,c])\ \forall c > a$.*

a) Aus $|f(x)| \le g(x)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ konvergent folgt, daß $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent ist.

b) Sei $p \in \mathbb{Z}$ und $f : [p,\infty) \to \mathbb{R}$ nicht-negativ, monoton fallend. Dann gilt:

$$\int_p^\infty f(x)dx \text{ konvergent } \Leftrightarrow \sum_{n=p}^\infty f(n) \text{ konvergent}$$

Beispiel:

$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ konvergiert, da $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$ konvergiert (Wurzelkriterium).

Bemerkung:

$\int_{-\infty}^a f(x)dx := \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)dx$, falls der Limes existiert.

$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$,

falls beide Integrale auf der rechten Seite konvergieren. In diesem Fall hängt die rechte Seite nicht von der Wahl von a ab.

Definition 10.34 *Sei $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ unbeschränkt bei a, beschränkt und integrierbar auf $[c,b]$ für alle $c \in (a,b)$. Man definiert:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)dx,$$

falls der Limes existiert. In diesem Fall heißt $\int_a^b f(x)dx$ konvergent.

<u>*Analog:*</u> *Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ bei b unbeschränkt, $f \in R([a,c])\ \forall c \in (a,b)$. Man definiert:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)dx,$$

falls der Limes existiert.

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ bei a und b unbeschränkt, $f \in R([c_1,c_2])\ \forall a < c_1 < c_2 < b$. Man definiert:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

falls die beiden rechten Integrale konvergieren. In diesem Fall hängt die rechte Seite nicht von der Wahl von c ab.

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha},\ \alpha > 0$$

$$\alpha \neq 1: \ \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\Big(1 - \frac{1}{\epsilon^{\alpha-1}}\Big) \overset{\epsilon\to 0}{\to} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & ,\ 0 < \alpha < 1 \\ \infty & ,\ \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1: \ \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln 1 - \ln \epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\to} \infty$$

Index