Analysis 2 - Kurzskript

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Sommersemester 2009

– In LaTeX gesetzt von Norman Weik –

Dieses Skript enthält alle Sätze, Hilfssätze, Definitionen und Aussagen der Vorlesung. Beweise, Rechnungen sowie Kommentare und Erläuterungen, die in der Vorlesung dargestellt wurden, werden hier nicht wiedergegeben.

Inhaltsverzeichnis

1 $\mathbb{R}^n$, topologische Grundbegriffe, Banachräume

1.1 $\mathbb{R}^n$ als euklidischer Raum

Definition 1.1 *Auf* $\mathbb{R}^n = \Big\{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\Big\}$ *werden definiert:*

a) Addition: $x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),\ x, y \in \mathbb{R}^n$

b) Skalarmultiplikation: $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$

c) Skalarprodukt: $< x, y >:= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *(oft:* $x \cdot y =< x, y >$*)*

d) euklidische Norm: $||x|| := \sqrt{< x, x >} = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$.
$||x - y||$ *heisst euklidischer Abstand von* x *und* y.

Bemerkung:

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot, < \cdot, \cdot >)$ heißt euklidischer Vektorraum

Lemma 1.2 *Es gilt* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$*:*

a) $||x|| > 0$ *für* $x \neq 0$

b) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$

c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

d) $| < x, y > | \leq ||x|| \cdot ||y||$

e) $||x - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z||$

f) $\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x - y||$

g) $< \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z >= \lambda < x, z > + \mu < y, z >$

h) $< x, y >=< y, x >$

i) $e_i := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0),\ i = 1, \dots, n$ *sei Standardbasis.*

Dann gilt: $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$

j) $|x_i| \leq ||x|| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad (i = 1, \dots, n)$

1.2 Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $x^k \in \mathbb{R}^n$. $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt Folge (von Vektoren) im $\mathbb{R}^n$

Beachte: $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$

Definition 1.3 *Eine Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt*

a) *beschränkt, falls $M > 0$ existiert mit $||x^k|| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$*

b) *konvergent, falls $a \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} ||x^k - a|| = 0$ (Schreibweise: $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = a$)*

c) *Cauchy-Folge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein Index $N = N(\epsilon)$ existiert mit*

$$k, l \geq N \Rightarrow ||x^k - x^l|| < \epsilon$$

Satz 1.4 *Sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge im $\mathbb{R}^n$.*

a) *$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ jede der Koordinatenfolgen $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.*

b) *$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ jede der Koordinatenfolgen $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.*

Korollar 1.5

a) *$(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge.*

b) *Jede konvergente Folge hat genau einen Grenzwert und ist beschränkt.*

c) *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

1.3 Kugel, Sphäre, Umgebung

Definition 1.6 *Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$. Dann heißt:*

$B_r(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| < r \right\}$ *offene Kugel mit Mittelpunkt a, Radius r*

$\overline{B_r(a)} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| \leq r \right\}$ *abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt a, Radius r*

$S_r(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : ||x - a|| = r \right\}$ *Sphäre mit Mittelpunkt a, Radius r*

Definition 1.7

Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$. *Dann heißt*

$$\operatorname{diam} M := \sup \Big\{ ||x-y|| : x, y \in M \Big\}$$

Durchmesser von M. Setze $\operatorname{diam} \emptyset = 0$. M *heißt beschränkt, falls* $\operatorname{diam} M < \infty$

Bemerkung:

M ist beschränkt $\Leftrightarrow \exists$ Kugel $B_r(a)$ mit $M \subset B_r(a)$.

Definition 1.8 *Sei* $a \in \mathbb{R}^n$. *Eine Menge* $U \subset \mathbb{R}^n$ *heißt Umgebung von* a, *falls* $\epsilon > 0$ *existiert mit* $B_\epsilon(a) \subset U$.

1.4 Innere Punkte, Randpunkte, Häufungspunkte

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $A^C := \mathbb{R}^n \setminus A$

Definition 1.9 *Sei* $A \in \mathbb{R}^n$. *Ein Punkt* $a \in \mathbb{R}^n$ *heißt:*

a) *innerer Punkt von* A, *falls* $\epsilon > 0$ *existiert mit* $B_\epsilon(a) \subset A$ ($\Leftrightarrow$ A *ist Umgebung von* a)
b) *Randpunkt von* A, *falls* $\forall \epsilon > 0$ *gilt:* $B_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset$ *und* $B_\epsilon(a) \cap A^C \neq \emptyset$
c) *Häufungspunkt von* A, *falls jede Kugel* $B_\epsilon(a)$, $\epsilon > 0$, *unendlich viele Punkte von* A *enthält.*

Definiere:

$A^0 = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist innerer Punkt von } A \Big\}$ *„Inneres von A"*

$\partial A = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Randpunkt von } A \Big\}$ *„Rand von A"*

$\overline{A} = A \cup \partial A$ *„abgeschlossene Hülle von A"*

$H(A) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ ist Häufungspunkt von } A \Big\}$

Lemma 1.10

a) $A^0 \subset A \subset \overline{A}$

b) $\mathbb{R}^n = \underbrace{A^0 \cup (A^C)^0 \cup \partial A}_{disjunkt}$

c) $\overline{A} = A \cup \partial A = A^0 \cup \partial A$

d) $(A^C)^0 = (\overline{A})^C$

1.5 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 1.11 *Sei $A \in \mathbb{R}^n$*

a) A heißt offen, falls $A = A^0$.

b) A heißt abgeschlossen, falls A^C offen ist.

Bemerkung

a) $\emptyset$ ist offen, denn $\emptyset^0 = \emptyset$.

$\emptyset$ ist abgeschlossen, denn $\emptyset^C = \mathbb{R}^n$ ist offen

analog: $\mathbb{R}^n$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen

b) Sei $A := (0, 1] \subset \mathbb{R}$. A ist weder offen noch abgeschlossen

Satz 1.12

a) Die Mengen $A_\alpha \subset \mathbb{R}^n,\ \alpha \in I$ seien offen $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ ist offen

b) Die Mengen $A_1, \dots, A_l \subset \mathbb{R}^n$ seien offen $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{l} A_i$ ist offen

c) Die Mengen $A_\alpha \subset \mathbb{R}^n,\ \alpha \in I$ seien abgeschlossen $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ ist abgeschlossen

d) Die Mengen $A_1, \dots, A_l \subset \mathbb{R}^n$ seien abgeschlossen $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{l} A_i$ ist abgeschlossen

Bemerkung:

$A_k := (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \subset \mathbb{R}$ ist offen. $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{0\}$ ist abgeschlossen

$A_k := [-1 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}] \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (-1, 1)$ ist offen

Satz 1.13 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist A^0 offen und $\overline{A}$, ∂A sind abgeschlossen.*

Satz 1.14

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $H(A) =$ Menge der Häufungspunkte von A und

$L(A) := \Big\{ x : \exists$ Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = x \Big\}$. Dann gilt

$$\overline{A} = L(A) = A \cup H(A)$$

Korollar 1.15 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

A abgeschlossen $\Leftrightarrow H(A) \subset A \Leftrightarrow$ für jede konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A gilt $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \in A$

1.6 Banachräume und Kontraktionsprinzip

Definition 1.16

Sei X ein reeller Vektorraum und $N : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung (schreibe $||x|| = N(x)$) mit folgenden Eigenschaften. $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

N1) $||x|| \geq 0$ *und* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2) $||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||$

N3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Dann heißt N Norm auf X und $(X, ||\cdot||)$ heißt normierter Raum.

Bemerkung:

Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in X. Die Begriffe beschränkt, konvergent, Cauchy-Folge können wörtlich wie in Definition 1.3 erklärt werden. Die Definitionen aus den Abschnitten 1.3, 1.4, 1.5 können wörtlich auf normierte Räume übertragen werden.

Ausgenommen von der wörtlichen übertragung: Satz 1.4 und Korollar 1.5

Definition 1.17

Sei $(X, ||\cdot||)$ normierter Raum. Falls jede Cauchy-Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k \in X$ besitzt, dann heißt $(X, ||\cdot||)$ vollständig bzw. Banachraum.

Satz 1.18 (Kontraktionsprinzip, Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $(X, ||\cdot||)$ ein Banachraum und $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Die Abbildung $f : A \to A$ erfülle die Bedingung $||f(x) - f(y)|| \leq q||x - y||\ \forall x, y \in A$ für eine Konstante $q \in [0, 1)$. Dann gilt:

i) Es existiert genau ein $x^* \in A$ mit $f(x^*) = x^*$ (x^* ist Fixpunkt).

ii) Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $x_{k+1} = f(x_k),\ k \in \mathbb{N}_0,\ x_0 \in A$ beliebig, konvergiert gegen x^*.

iii) Es gilt $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$||x_k - x^*|| \leq \frac{1}{1-q}||x_{k+1} - x_k|| \leq \frac{q^k}{1-q}||x_1 - x_0||$$

Bemerkung:

Eine Abbildung mit den Eigenschaften wie in Satz 1.18 nennt man Kontraktion.

Beispiele für Kontraktionen:

i) $(X, ||\cdot||) = (\mathbb{R}, |\cdot|),\ A = \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{4}e^{-x^2}$

ii) $(X, ||\cdot||) = (\mathbb{R}^2, ||\cdot||),\ A = \mathbb{R}^2,\ f(x) := \left(\frac{1}{8}e^{-x_2^2}, \dfrac{1}{4(1+x_1^2)}\right)$

Satz 1.19

i) Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C([a, b])$ und $f \in C([a, b])$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} ||f_k - f||_\infty = 0 \Leftrightarrow (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \textit{ konvergiert gleichmäßig auf } [a, b] \textit{ gegen } f$$

ii) $\Big(C([a, b]), ||\cdot||_\infty\Big)$ ist Banachraum

Beispiel: (normierter Vektorraum, der kein Banachraum ist)

$(X, ||\cdot||) = \Big(C([a, b]), ||\cdot||_1\Big)$, wobei $||f||_1 := \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$

2 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Im Folgenden sei stets $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

2.1 Definitionen

Zu $\xi \in \mathbb{R}^n,\ r > 0$ sei $\dot{B}_r(\xi) = B_r(\xi) \setminus \{\xi\}$ "punktierte Kugel"

Definition 2.1 (Grenzwert)

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{R}^n$ Häufungspunkt von D. Man sagt: f strebt gegen $\eta \in \mathbb{R}^m$ für $x \to \xi$, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ exisitert mit:

$$x \in D \cap \dot{B}_\delta(\xi) \Rightarrow ||f(x) - \eta|| < \epsilon$$

In Symbolen: $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = \eta$ oder $f(x) \to \eta$ für $x \to \xi$

Definition 2.2 (Stetigkeit)

Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $\xi \in D$. f heisst stetig an der Stelle ξ, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert:

$$x \in D \cap B_\delta(\xi) \Rightarrow ||f(x) - f(\xi)|| < \epsilon$$

Bemerkung:

a) f heisst stetig auf D, falls f in jedem Punkt $\xi \in D$ stetig ist. Man schreibt $f \in C(D)$.
b) Sei $\xi \in D$ Häufungspunkt. Dann gilt: f ist stetig in $\xi \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$

Definition 2.3 (Lipschitz-Stetigkeit)

$f : D \to \mathbb{R}^m$ heisst Lipschitz-stetig auf D (kurz: $f \in \mathrm{Lip}(D)$), falls $L > 0$ existiert mit:

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||\ \forall x, y \in D$$

Beachte: $\mathrm{Lip}(D) \subset C(D)$

Definition 2.4 (Gleichmässige Stetigkeit) *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heisst gleichmässig stetig auf D, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit:*

$$||x - y|| \leq \delta, \quad x, y \in D \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon$$

Satz 2.5 (Folgenkriterium) *Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.*

a) $\xi \in \mathbb{R}^n$ sei Häufungspunkt von D. Dann gilt:

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta \Leftrightarrow \forall \text{ Folgen } (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ in } D \setminus \{\xi\} \text{ mit } \lim_{k \to \infty} x_k = \xi \text{ gilt } \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \eta$$

b) f ist stetig in $\xi \in D \Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = \xi$ gilt $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(\xi)$

2.2 Beispiele stetiger Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 2.6

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$. Dann ist für jedes $x \in D$ der Funktionswert $f(x)$ von der Form $f(x) = \Big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\Big)$. Für $i = 1, \ldots, m$ heisst

$$f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_i(x) \end{array} \right. \qquad \textit{i-te Koordinatenfunktion.}$$

Satz 2.7 *$f : D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig $\Leftrightarrow$ jede Koordinatenfunktion $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

Satz 2.8 *$f, g : D \to \mathbb{R}^m$ seien stetig.*

a) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f + \mu g$ stetig.

b) Sei $m = 1$. Die Funktionen $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (falls $g \neq 0$), $|f|, f^+, f^-, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ sind stetig.

c) $$\left. \begin{array}{llll} f : D & \to & \mathbb{R}^m & \textit{stetig} \\ g : f(D) & \to & \mathbb{R}^l & \textit{stetig} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow h = g \circ f : D \to \mathbb{R}^l \textit{ stetig.}$$

2.3 Äquivalente Beschreibung der Stetigkeit

Definition 2.9

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Menge $M \subset D$ heisst

a) *relativ offen in D, falls eine offene Menge $O \in \mathbb{R}^n$ existiert mit $M = D \cap O$.*
b) *relativ abgeschlossen in D, falls eine abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $M = D \cap A$.*

Satz 2.10

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

$$f \text{ ist stetig auf } D \Leftrightarrow \forall \text{ offene Mengen } V \subset \mathbb{R}^m \text{ ist } f^{-1}(V) \text{ relativ offen in } D$$

2.4 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Definition 2.11 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^m$ heisst kompakt, falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M einen Häufungspunkt besitzt.(Äquivalent: ..., falls jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit Grenzwert $x \in M$ besitzt.)*

Satz 2.12 *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$. Dann gilt:*

$$M \text{ kompakt } \Leftrightarrow M \text{ ist beschränkt und abgeschlossen}$$

Satz 2.13

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist $f(D)$ kompakt.

Korollar 2.14

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists x_*, x^*$ mit $f(x_*) = \inf\limits_D f$ und $f(x^*) = \sup\limits_D f$.

Satz 2.15

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann ist f gleichmässig stetig auf D, d.h. zu $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$:

$$x, y \in D,\ ||x - y|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon$$

Satz 2.16 (Satz über die Umkehrfunktion)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig und injektiv. Dann exisitert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ und ist stetig.

2.5 Folgen stetiger Funktionen, der Banachraum $(C(D), ||\cdot||_\infty)$

Definition 2.17

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R}^m$ sowie $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion.

a) *f_k heisst punktweise konvergent gegen f, falls $\forall x \in D$ gilt: $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$*

b) *f_k heisst gleichmässig konvergent gegen f, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit:*

$$k \geq k_0 \Rightarrow ||f_k(x) - f(x)|| < \epsilon \quad \forall x \in D$$

Satz 2.18 (vgl. Ana 1 Satz 7.4)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_k : D \to \mathbb{R}^m$, die gleichmässig auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}^m$ konvergiert.

a) *Ist jedes f_k stetig an der Stelle $\xi \in D$, so ist f stetig an der Stelle ξ.*

b) *Ist $f_k \in C(D)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, so ist $f \in C(D)$.*

Definition 2.19

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ kompakt. Auf $C(D) = \{f : D \to \mathbb{R}^m,\ f \text{ stetig}\}$ wird die folgende Norm eingeführt:

$$||f||_\infty := \max_{x\in D} ||f(x)||$$

Bemerkung:

a) Die Abbildung $x \mapsto ||f(x)||$ ist stetig auf D.

b) Die Normeigeschaften von $||\cdot||_\infty$ sind leicht einsehbar.

Satz 2.20

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist $\Big(C(D), ||\cdot||_\infty\Big)$ ein Banachraum (vgl. Satz 7.3 Ana 1, Satz 1.19)

2.6 Stetige Fortsetzbarkeit

Satz 2.21

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ sei gleichmässig stetig auf D. Dann exisitert eine eindeutige stetige Fortsetzung $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^m$ von f auf $\overline{D}$.

Beispiele:

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ besitzt keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{x}{||x||}$ hat keine stetige Fortsetzung auf $\overline{D} = \mathbb{R}^n$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{\sin ||x||}{||x||}$, $x \neq 0$ hat stetige Fortsetzung F auf $\mathbb{R}^n$, denn $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ und F ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin(||x||)}{||x||}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

2.7 Äquivalente Normen auf $\mathbb{R}^n$

Definition 2.22

Sei X ein Vektorraum und $||\cdot||$, $|||\cdot|||$ seien zwei Normen auf X. Die beiden Normen heissen äquivalent, falls Konstanten $\alpha, \beta > 0$ existieren mit

$$\alpha ||x|| \leq |||x||| \leq \beta ||x|| \quad \forall x \in X \qquad (*)$$

Bemerkung:

a) Aus $(*)$ folgt $\frac{1}{\beta}|||x||| \leq ||x|| \leq \frac{1}{\alpha}|||x|||$

b) Ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Folge / Cauchyfolge bzgl. $||\cdot||$, so auch bzgl. $|||\cdot|||$. Folglich besitzten $\Big(X, ||\cdot||\Big)$, $\Big(X, |||\cdot|||\Big)$ dieselben konvergenten Folgen und es gilt:

$\Big(X, ||\cdot||\Big)$ vollständig $\Leftrightarrow$ $\Big(X, |||\cdot|||\Big)$ vollständig

Satz 2.23 *Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Bemerkung: Satz 2.23 gilt auch auf endlich-dimensionalen normierten Räumen.

Korollar 2.24

Auf $\mathbb{R}^n$ *seien zwei Normen* $||\cdot||$, $|||\cdot|||$ *gegeben. Dann gilt für* $A \subset \mathbb{R}^n$*:*

$$A \text{ ist offen in } \left(\mathbb{R}^n, ||\cdot||\right) \Leftrightarrow A \text{ ist offen in } \left(\mathbb{R}^n, |||\cdot|||\right)$$

$$A \text{ ist abgeschlossen in } \left(\mathbb{R}^n, ||\cdot||\right) \Leftrightarrow A \text{ ist abgeschlossen in } \left(\mathbb{R}^n, |||\cdot|||\right)$$

$$A \text{ ist kompakt in } \left(\mathbb{R}^n, ||\cdot||\right) \Leftrightarrow A \text{ ist kompakt in } \left(\mathbb{R}^n, |||\cdot|||\right)$$

Folgerung:

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Der Begriff „f ist stetig im Punkt $\xi \in D$" ist unabhängig davon, welche Normen auf $\mathbb{R}^n$, bzw. auf $\mathbb{R}^m$ gewählt wurden.

2.8 Landau-Symbolik

Definition 2.25

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ *und* $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : D \to (0, \infty)$ *seien Funktionen und* ξ *Häufungspunkt von* D*.*

a) $f(x) = o(g(x))$ *für* $x \to \xi$ *bedeutet* $\lim\limits_{x\to\xi} \frac{||f(x)||}{g(x)} = 0$

b) $f(x) = O(g(x))$ *für* $x \to \xi$ *bedeutet es existieren* $C \geq 0$ *und eine Kugel* $B_r(\xi)$ *mit* $||f(x)|| \leq Cg(x)\ \forall x \in B_r(\xi) \cap D$

Sprechweise: „$f(x)$ ist klein o von $g(x)$" bzw. „$f(x)$ ist gross O von $g(x)$" fü $x \to \xi$

Sinngemässe Varianten:

I) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m,\ g : D \subset \mathbb{R} \to (0, \infty)$

$f(x) = o(g(x))$ für $x \to \infty$ (bzw. $-\infty$) bedeutet $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{||f(x)||}{g(x)} = 0$

$f(x) = O(g(x))$ für $x \to \infty$ (bzw. $-\infty$) bedeutet es existieren $C \geq 0,\ r > 0$ mit $|f(x)| \leq Cg(x) \quad \forall x \in D,\ x > r$ (bzw. $x < -r$)

II) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seien Folgen, $b_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

$a_k = o(b_k)$ für $k \to \infty$ bedeutet $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$

$a_k = O(b_k)$ für $k \to \infty$ bedeutet $\exists C \geq 0, k_0 \in \mathbb{N}$: $|a_k| \leq C b_k\ \forall k \geq k_0$

III) $f(x) = g(x) + o(h(x))$ bedeutet $f(x) - g(x) = o(h(x))$

3 Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

3.1 Beispiele mit zwei Veränderlichen

$f(x,y) = xye^{x^2y}, \quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Partielle Ableitung von f nach x:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) = ye^{x^2y} + 2x^2y^2e^{x^2y}$ (y festhalten, nach x differenzieren)

Partielle Ableitung von f nach y:

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = xe^{x^2y} + x^3ye^{x^2y}$ (x festhalten, nach y differenzieren)

Höhere partielle Ableitungen:

$f_{xx} = (f_x)_x, \ f_{xy} = (f_x)_y, \ldots,$
$f_{xx}(x,y) = (2xy^2 + 4xy^2 + 4x^3y^3)e^{x^2y},$
$f_{xy}(x,y) = (1 + x^2y + 4x^2y + 2x^4y^2)e^{x^2y},$
$f_{yx}(x,y) = (1 + 2x^2y + 3x^2y + 2x^4y^2)e^{x^2y},$
$f_{yy}(x,y) = (2x^3 + x^5y)e^{x^2y}$, etc....

Schreibweisen:

$f_{xx} = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \ f_{xy} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \ f_{yx} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \ f_{yy} = \frac{\partial f}{\partial y^2}$

Definition 3.1 *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ und $f: D \to \mathbb{R}$, $(\xi,\eta) \in D$*

$$f_x(\xi,\eta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h, \eta) - f(\xi,\eta)}{h}$$
$$f_y(\xi,\eta) = \lim_{k \to 0} \frac{f(\xi, \eta + k) - f(\xi,\eta)}{k},$$

falls der jeweilige Limes gebildet werden kann und existiert.

Bemerkung:

Beide Limiten können sicher gebildet werden, wenn $(\xi,\eta) \in D^0$.

Es gibt allerdings weitere Möglichkeiten, bei denen f_x, f_y sinnvollerweise gebildet werden können. Sei z.B. $D = [a,a'] \times [b,b']$

$\xi = a, \ \eta \in (b,b')$: $f_y(\xi,\eta) = \lim\limits_{k \to 0} \frac{f(\xi,\eta+k) - f(\xi,\eta)}{k}$

$\xi = a, \ \eta \in [b,b']$: $f_x(\xi,\eta) = \lim\limits_{h \to 0+} \frac{f(\xi+h,\eta) - f(\xi,\eta)}{h}$

Satz 3.2

$f : D \to \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D^0$ und f_x, f_y existieren und sind stetig in einer Umgebung von (x_0, y_0). Dann ist f stetig in (x_0, y_0).

Gegenbeispiel:

$$f : \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f ist unstetig in $(0,0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$

aber:

$f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0$, $f_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \frac{f(0,k)}{k} = 0$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$f_x(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$,

d.h. f_x, f_y existieren in jedem Punkt, sind aber unstetig in $(0,0)$.

Satz 3.3 (Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge, Satz von Schwarz)

Es sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ seien stetig auf D. Dann gilt $f_{xy} = f_{yx}$.

Gegenbeispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\Big(\frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big),\ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_x(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\Big(\frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big),\ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy}{h} \cdot \frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y, \quad y \neq 0,\ (\text{stimmt auch für } y = 0)$$

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} x \cdot \frac{x^2-k^2}{x^2+k^2} = x$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = 1$$

Grund für $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$: die partiellen Ableitungen f_{xy}, f_{yx} sind unstetig in $(0,0)$.

3.2 n Veränderliche

Definition 3.4 (Partielle Ableitung reellwertiger Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $\xi \in D$. f heißt im Punkt $\xi \in D$ partiell nach x_j differenzierbar, falls die Abbildung $x_j \mapsto g(x_j) = f(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, x_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$ auf einem Intervall der Form $[x_j, x_j + \delta]$, $[x_j - \delta, x_j]$, $[x_j - \delta, x_j + \delta]$ erklärt und an der Stelle x_j (gegebenenfalls einseitig) differenzierbar ist.

In Zeichen:

$f_{x_j}(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi) := \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(\xi + he_j) - f(\xi)}{h}$, *wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist.*

Existiert $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)$ in jedem Punkt $\xi \in D$, so ist die Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \end{array} \right.$ definiert.

Definition 3.5 (Gradient) *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\xi \in D$.*

Falls an der Stelle ξ die partiellen Ableitungen nach $x_1, \dots, x_n$ existieren, dann heißt

$$grad\ f(\xi) = \nabla f(\xi) = \Big(f_{x_1}(\xi), \dots, f_{x_n}(\xi)\Big)$$

Gradient von f an der Stelle ξ. (∇ wird „nabla“ ausgesprochen)

Beachte: *grad f ist Zeilenvektor*

Bemerkung:
Für partielle Ableitungen gelten die üblichen Rechenregeln:
$\frac{\partial}{\partial x_j}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j}$, $\frac{\partial}{\partial x_j}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_j} g + f \frac{\partial g}{\partial x_j}$

Definition 3.6 (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ und $\xi \in D$. f heißt im Punkt ξ partiell nach x_j differenzierbar, falls jede Koordinatenfunktion $f_i : D \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, m)$ partiell nach x_j differenzierbar ist.

Die Matrix

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} grad\ f_1 \\ \vdots \\ grad\ f_n \end{pmatrix}$$

heißt Jacobimatrix von f.

Im Fall $m = n$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ quadratisch und $\det(\frac{\partial f}{\partial x})$ heißt Jacobideterminante.

Vereinbarung bei Matrizenprodukten:

$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ *Spaltenvektoren*

$\operatorname{grad} f_i(x) := (\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n})$ *Zeilenvektor*

Definition 3.7 (Höhere partielle Ableitungen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$. $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ heißen partielle Ableitungen erster Ordnung. Ist f_{x_i} nach x_j differenzierbar, dann heißt $f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j}$ partielle Ableitung zweiter Ordnung.

Schreibweise:

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

analog:

$f_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}} := (f_{x_{i_1}\ldots x_{i_{k-1}}})_{x_{i_k}}$ *heißt partielle Ableitung k-ter Ordnung.*

Schreibweise:

$$f_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$$

Definition 3.8 (Die Räume $C^k(D)$, $C^k(\overline{D})$)

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen.

a) $m = 1$:

$C^k(D) = \{f : D \to \mathbb{R}$, *alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ existieren und sind stetig auf $D\}$*, $C^0(D) := C(D)$

$C^k(\overline{D}) = \{f \in C^k(D)$ *alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ haben eine stetige Fortsetzung auf* $(\overline{D})\}$

$C^\infty(D) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(D)$, $C^\infty(\overline{D}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} C^k(\overline{D})$

b) $m \geq 2$

$C^k(D) = C^k(D, \mathbb{R}^m) = \{f : D \to \mathbb{R}^m$, *jede Koordinatenfunktion* $f_1, \ldots f_m \in C^k(D)\}$

restliche Bezeichnungen $C^k(\overline{D}, \mathbb{R}^m)$, etc. sinngemäß.

Satz 3.9 (Satz von Schwarz) *Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ und $f \in C^k(D)$, $k \geq 2$. Dann ist jede partielle Ableitung der Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation.*

3.3 Vollständige Differenzierbarkeit

Definition 3.10 (Vollständige Differenzierbarkeit)
Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ Umgebung des Punktes ξ und $f : U \to \mathbb{R}^m$. f heißt vollständig differenzierbar im Punkt ξ, falls eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$f(\xi + h) - f(\xi) - L(h) = o(||h||) \text{ für } h \to 0.$$

Äquivalente Formulierungen:

$$f(\xi + h) - f(\xi) - L(h) =: r(h) \text{ und } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{||h||} = 0$$

$$\text{bzw.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi) - L(h)}{||h||} = 0.$$

L heißt Ableitung von f an der Stelle ξ. In Zeichen: $Df(\xi) = L$

Bemerkung:

a) Im Fall $n = m = 1$ ist $L : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & f'(\xi) \cdot h \end{cases}$

b) Bekannt aus der Linearen Algebra: Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Wähle in $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ jeweils Standardbasis. Dann existiert eine $m \times n$-Matrix C mit $L(h) = Ch$. Beachte h, $L(h)$ sind Spaltenvektoren.

c) Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ offen. Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ in jedem Punkt von D differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf D.

Beispiel:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 y$

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y) =& (x+h)^2(y+k) - x^2 y = (x^2 + 2xh + h^2)(y+k) - x^2 y \\ =& x^2 k + 2xyh + 2xhk + h^2 y + h^2 k \\ =& (2xyh + x^2 k) + 2xhk + h^2 y + h^2 k = \underbrace{(2xy, x^2)}_{1\times 2-Matrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + r(h, k) \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} |r(h,k)| &\le 2|x||h||k| + h^2|y| + h^2|k| \\ &\le |x|(h^2 + k^2) + (|y| + 1)h^2 \text{ falls } |k| < 1 \\ &\le (|x| + |y| + 1)||(h,k)||^2. \end{aligned}$$

Also gilt $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{||(h,k)||} = 0$ und es folgt:

$$Df(x,y) = (2xy, x^2)$$

beachte auch: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$
d.h. es gilt: $Df(x,y) = \nabla f(x,y)$

Satz 3.11

Ist $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle $\xi \in U$ vollständig differenzierbar, dann gilt:

a) f ist stetig an der Stelle ξ

b) alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an der Stelle ξ existieren und es gilt:

$$\underbrace{Df(\xi)(h)}_{vollst\ddot{a}ndige\ Ableitung} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)}_{Jacobimatrix} \cdot h$$

Insbesondere gilt im Fall $m = 1$:

$$Df(\xi)(h) = \operatorname{grad} f(\xi) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) h_i$$

Bemerkung:
Oftmals wird zwischen der linearen Abbildung L und ihrer Abbildungsmatrix C nicht unterschieden. Daher benutzt man Satz 3.11 auch in der Form $Df(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi)$.

Beispiele:

a) $b \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = Ax + b$
$f(x+h) - f(x) = Ah$, also existiert $Df(x)$ und $= A$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2y, e^{x+y})$
Jacobi-Matrix: $\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}$

Ist f vollständig differenzierbar? Wenn ja $\overset{Satz 3.11}{\to}$ $Df = \frac{\partial f}{\partial(x,y)}$

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= \Big((x+h)^2(y+k) - x^2y - 2xyh - x^2k, e^{x+y+h+k} - e^{x+y} - e^{x+y}(h+k)\Big) \\ &= \Big(2xhk + h^2(y+k), e^{x+y} \cdot (e^{h+k} - 1 - h - k)\Big) = r(h,k). \end{aligned}$$

Für $r(h,k)$ gilt die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
||r(h,k)|| &\leq |r_1(h,k)| - |r_2(h,k)| \\
&\overset{|h|,|k|\leq 1}{\leq} |x|(h^2+k^2) + (|y|+1)(h^2+k^2) + e^{x+y}\cdot e^{\tau}\frac{(h+k)^2}{2},\ \tau \text{ zwischen } 0,\, h+k \\
&\leq (|x|+|y|+1)\cdot ||(h,k)||^2 + \frac{e^{x+y+2}}{2}\cdot 2(h^2+k^2) \\
&\leq \Big(|x|+|y|+1+e^{x+y+2}\Big)\cdot ||(h,k)||^2.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \frac{r(h,k)}{||(h,k)||^2} \overset{h,k\to 0}{\to} 0$. Also ist f vollständig differenzierbar.

Satz 3.12

a) $U \subset \mathbb{R}^m$ sei Umgebung von ξ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ besitze in U partielle Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $(i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n)$, die im Punkt ξ stetig sind. Dann ist f im Punkt ξ vollständig differenzierbar.

b) Ist $D \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(D) \Rightarrow f$ ist differenzierbar in D.

Ergänzung

Achtung: Aus der Existenz der partiellen Ableitungen in einer ganzen Umgebung von ξ folgt nicht die die Differenzierbarkeit im Punkt ξ (vgl. Beispiel nach Satz 3.2)

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ f_x, f_y existieren in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$,

f ist aber in $(0,0)$ nicht differenzierbar (noch nicht einmal stetig).

Satz 3.13 (Kettenregel)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$, sowie $f : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ differenzierbar im Punkt $\xi \in \overset{o}{U}$ und

$g : \begin{cases} V & \to & \mathbb{R}^p \\ y & \mapsto & g(y) \end{cases}$ differenzierbar im Punkt $\eta = f(\xi) \in \overset{o}{V}$.

Dann ist $h = g\circ f : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{cases}$ differenzierbar im Punkt ξ und es gilt:

$$\underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}(\xi)}_{p\times n\text{-}Matrix} = \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(\eta)}_{p\times m\text{-}Matrix} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)}_{m\times n\text{-}Matrix}$$

Bemerkung:

Komponentenweise gilt die Formel: $\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}(\xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dfrac{\partial g_i}{\partial y_k}(\eta) \cdot \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}(\xi)$

Beispiele:

a) $h(t) = \displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \gamma(s)ds$, wobei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sei und $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen seien.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big(\alpha(t), \beta(t)\big) \end{array} \right. \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \int_u^v \gamma(s)ds = \Gamma(v) - \Gamma(u) \end{array} \right. \quad (\Gamma' = \gamma)$$

$$Df(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix}, \quad Dg(u,v) = \big(-\gamma(u), \gamma(v) \big)$$

Ergebnis: $h'(t) = Dg(f(t)) \cdot Df(t) = -\gamma(\alpha(t))\alpha'(t) + \gamma(\beta(t))\beta'(t)$

b) $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2xy, \sin y, x^2 + y) \end{array} \right. \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) & \mapsto & (u + w^2, vw, e^u) \end{array} \right.$$

$h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & \cos y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} \quad Dg(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2w \\ 0 & w & v \\ e^u & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dh(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x^2 + y \\ 0 & x^2 + y & \sin y \\ e^{2xy} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 0 & \cos y \\ 2x & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2y + 4x^3 + 4xy & 2x + 2x^2 + 2y \\ 2x \sin y & \cos y \, (x^2 + y) + \sin y \\ 2ye^{2xy} & 2xe^{2xy} \end{pmatrix}$$

c) Kettenregel im Fall $n = p = 1,\ m = 2$ (schreibe t anstatt x)

$f(t) = \big(\alpha(t), \beta(t)\big), \quad h(t) = g(\alpha(t), \beta(t))$

$f'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ \beta'(t) \end{pmatrix}, \quad y = (u,v), \quad \frac{\partial g}{\partial (u,v)}(u,v) = \big(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v), \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \big)$

$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(\alpha(t), \beta(t)\big)\alpha'(t) + \frac{\partial g}{\partial v}\big(\alpha(t), \beta(t)\big)\beta'(t)$

d) Aufteilung der Koordinaten in zwei Gruppen

$x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \in \mathbb{R}^m,\ g(y) \in \mathbb{R}^p,$

$y = (\underbrace{y_1, \dots, y_r}_{u}, \underbrace{y_{r+1}, \dots, y_m}_{v}) = (u, v)$ mit $u \in \mathbb{R}^r,\ v \in \mathbb{R}^{m-r}$

Dementsprechend: $f(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix}, \quad \alpha(x) \in \mathbb{R}^r,\ \beta(x) \in \mathbb{R}^{m-r}$

$\frac{\partial g}{\partial u}$ = Matrix der partiellen Ableitungen nach $y_1, \dots, y_r$

$\frac{\partial g}{\partial v}$ = Matrix der partiellen Ableitungen nach $y_{r+1}, \dots, y_m$

$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\big(\alpha(x), \beta(x)\big) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x) + \frac{\partial g}{\partial v}\big(\alpha(x), \beta(x)\big) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x}(x)$

Schematische Darstellung:

$$p\,\overset{n}{\boxed{\dfrac{\partial h(x)}{\partial x}}} = p\,\overset{m}{\underset{r \qquad m-r}{\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial u}}\boxed{\dfrac{\partial g}{\partial v}}}} \cdot \overset{n}{\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} \\[3ex] \dfrac{\partial \beta}{\partial x} \end{array}}}\begin{array}{l} r \\[3ex] m-r \end{array}$$

Satz 3.14 (Mittelwertsatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in D. Falls a, b und die Verbindungsstrecke $S_{ab} := \{(1-t)a + tb,\ t \in (0,1)\}$ in D liegen, dann existiert $\xi \in S_{ab}$ mit

$$f(b) - f(a) = \operatorname{grad} f(\xi) \cdot (b - a)$$

Definition 3.15 (Konvexität)

Eine Menge $C \in \mathbb{R}^m$ heißt konvex, falls $\forall a, b \in C$ gilt $S_{ab} \subset C$.

Korollar 3.16 *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.*

a) $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ *beschränkt* $\Rightarrow f \in \operatorname{Lip}(D)$

b) $\operatorname{grad} f \equiv 0 \Rightarrow f \equiv$ *const. in D.*

Bemerkung:

Teil b) ist verallgemeinerbar, falls $D \subset \mathbb{R}^n$ ein „Gebiet“ ist

3.4 Exkurs: Gebiete in $\mathbb{R}^n$

Definition 3.17 (Polygonzug)

a) *Für* $a, b \in \mathbb{R}^n$ *sei* $\overline{ab} = \{(1-t)a + tb, t \in [0,1]\}$ *die abgeschlossene Verbindungsstrecke von* a *zu* b.

b) *Für* $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n,\ k \geq 1$ *sei der Polygonzug* $P(a_0, \ldots, a_k)$ *erklärt durch*

$$P(a_0, \ldots, a_k) = \overline{a_0 a_1} \cup \overline{a_1 a_2} \cup \ldots \cup \overline{a_{k-1} a_k}$$

Definition 3.18 (Zusammenhangskomponenten) *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen.*

a) *Für* $x, y \in D$ *bedeutet* $x \sim y : \exists$ *Polygonzug* $P(x, a_1, \ldots, a_{k-1}, y) \subset D$. *Dann ist* $\sim$ *eine Äquivalenzrelation.*

b) *Die Äquivalenzklassen heißen Zusammenhangskomponenten von* D.

c) *Falls es nur eine Äquivalenzklasse gibt, dann heißt* D *zusammenhängend oder Gebiet.*

Satz 3.19 *Sei* $D \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $f \in C^1(D, \mathbb{R})$. *Falls* $\operatorname{grad} f \equiv 0$ *in* D, *dann ist* $f \equiv$*const. auf* D.

Ende des Exkurses

3.5 Richtungsableitung

Definition 3.20 (Richtungsableitung)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ *Umgebung von* ξ *und* $f : U \to \mathbb{R}$. *Sei* $e = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ *ein Einheitsvektor, d.h.* $\epsilon_1^2 + \ldots, \epsilon_n^2 = 1$. f *heißt im Punkt* ξ *in Richtung* e *differenzierbar, falls*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\xi + te) - f(\xi)}{t} \text{ existiert.}$$

Bezeichung für den Limes: $\frac{\partial f}{\partial e}(\xi)$

Bemerkung:

a) $f_{x_i}(\xi) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(\xi)$

b) $\frac{\partial f}{\partial(-e)}(\xi) = -\frac{\partial f}{\partial e}(\xi)$

Satz 3.21

Sei $U \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2,$ *Umgebung von* ξ *und* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *sei differenzierbar im Punkt* ξ.

a) $\forall$ *Einheitsvektoren* $e = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}^n$ *existiert* $\frac{\partial f}{\partial e}(\xi)$ *und es gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial e}(\xi) = \operatorname{grad} f(\xi) \cdot e = \sum_{n=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)\epsilon_i$$

b) $\bigcup\limits_{e \in \mathbb{R}^n, \|e\|=1} \{\frac{\partial f}{\partial e}(\xi)\} = [-||\operatorname{grad} f(\xi)||, ||\operatorname{grad} f(\xi)||]$

c) Falls $\operatorname{grad} f(\xi) \neq 0$, *dann gilt für* $e^* = \frac{\operatorname{grad} f(\xi)}{||\operatorname{grad} f(\xi)||}$

$$\frac{\partial f}{\partial e^\star}(\xi) = ||\operatorname{grad} f(\xi)||, \quad e^\star = \textit{ Richtung des stärksten Anstiegs}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(-e^\star)}(\xi) = -||\operatorname{grad} f(\xi)||, \quad -e^\star = \textit{ Richtung des stärksten Abfalls}$$

4 Satz von Taylor, Lokale Extrema

Satz 4.1 (Satz von Taylor)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(D, \mathbb{R})$, $m \geq 0$ und die Punkte ξ, $\xi + h$ sowie ihre Verbindungsstrecke $S_{\xi,\xi+h}$ seien in D gelegen. Dann gilt:

$$f(\xi+h) = f(\xi)+\nabla f(\xi)\cdot h+\sum_{i,j=1}^{n} \frac{h_i h_j}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)+\ldots+\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{h_{i_1} \ldots h_{i_m}}{m!} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(\xi)+R_m$$

mit

$$R_m = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{n} \frac{h_{i_1} \ldots h_{i_{m+1}}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m+1}}}(\xi + \tau h)$$

für ein $\tau = \tau(\xi, h) \in (0, 1)$

Definition 4.2 (Hesse-Matrix)

Die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ besitze im Punkt $x \in \overset{o}{D}$ partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Dann heißt die $n \times n$-Matrix

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix} \textit{ Hesse-Matrix.}$$

Falls $f \in C^2(D)$, dann folgt mit dem Satz von Schwarz $H_f^T(x) = H_f(x)$, d.h. $H_f(x)$ ist symmetrisch.

Beachte:

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) = h^T \cdot H_f(\xi) \cdot h \qquad h \text{ Spaltenvektor}$$

Folgerung (Taylor-Formel zweiter Ordnung):

$$f(\xi + h) = f(\xi) + \nabla f(\xi) \cdot h + \frac{1}{2} h^T \cdot H_f(\xi + \tau h) \cdot h \text{ für ein } \tau = \tau(\xi, h) \in (0, 1)$$

Definition 4.3 (Lokale Extrema reellwertiger Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Man sagt f besitzt im Punkt $\xi \in D$ ein

> *lokales Maximum, falls eine Kugel $B_\delta(\xi)$ existiert mit $f(\xi) \geq f(x) \quad \forall x \in B_\delta(\xi) \cap D$*
>
> *lokales Minimum, falls eine Kugel $B_\delta(\xi)$ exisitert mit $f(\xi) \leq f(x) \quad \forall x \in B_\delta(\xi) \cap D$*

Falls „$=$“ nur für $x = \xi$ gilt, so heißt ξ „strenges Extremum“ (strenges lokales Maximum/Minimum).

Falls

> *$f(\xi) \geq f(x)$ $\forall x \in D$, so besitzt f im Punkt ξ ein globales Maximum.*
>
> *$f(\xi) \leq f(x)$ $\forall x \in D$, so besitzt f im Punkt ξ ein globales Minimum.*

Satz 4.4 (Kriterium von Fermat)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ besitze in $\xi \in \overset{o}{D}$ ein lokales Extremum. Falls $\operatorname{grad} f(\xi)$ *existiert dann gilt* $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$.

Bemerkung:

Sei $f(x, y) = xy$. $\operatorname{grad} f(0, 0) = (0, 0)$, aber f hat in $(0, 0)$ kein lokales Extremum.

Definition 4.5 (Quadratische Formen)

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Dann heißt $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$Q_A(x) := x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j$$

quadratische Form. Die Matrix A (bzw. die quadratische Form Q_A) heißt

> *positiv definit, falls $Q_A(x) > 0$ $\forall x \neq 0$*
>
> *positiv semi-definit, falls $Q_A(x) \geq 0$ $\forall x$*
>
> *negativ definit, falls $Q_A(x) < 0$ $\forall x \neq 0$*
>
> *negativ semi-definit, falls $Q_A(x) \leq 0$ $\forall x$*
>
> *indefinit, falls $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $Q_A(x_0) > 0 > Q_A(y_0)$*

Definition 4.6 (Matrix-Norm)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Definiere* $||A|| := \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Bemerkung:

Auf dem Vektorraum der reellen $m \times n$-Matrizen ist $||\cdot||$ eine Norm.

Lemma 4.7 *Sei* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$

a) $||Ax|| \leq ||A||\,||x||$

b) Falls $m = n$ *dann gilt* $Q_A(x) \leq ||A||\,||x||^2$

Lemma 4.8 *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

a) $Q_A(x)$ *positiv definit* $\Leftrightarrow\ \exists\ \alpha > 0 :\ Q_A(x) \geq \alpha\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $||x|| = 1$.

b) Q_A *positiv/negativ/indefinit* $\Rightarrow \exists\ \epsilon > 0$, *sodass* $\forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $||B - A|| < \epsilon$ *gilt:* Q_B *positiv/negativ/indefinit.*

c) Q_A *indefinit* $\Rightarrow \exists\ a, b \in \mathbb{R}^n$ *mit* $||a|| = ||b|| = 1$ *und* $\epsilon > 0$ *mit der Eigenschaft:* $Q_B(\lambda a) > 0 > Q_B(\lambda b)\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und alle* $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit* $||B - A|| < \epsilon$.

Satz 4.9 (Hinreichende Bedingung für Lokale Extrema)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : D \to \mathbb{R}$ *sei in* $C^2(D)$ *und für* $\xi \in D$ *gelte* $\operatorname{grad} f(\xi) = 0$. *Dann gilt:*

a) $H_f(\xi)$ *positiv definit* $\Rightarrow f$ *hat an der Stelle* ξ *ein lokales Minimum.*

b) $H_f(\xi)$ *negativ definit* $\Rightarrow f$ *hat an der Stelle* ξ *ein lokales Maximum.*

c) $H_f(\xi)$ *indefinit* $\Rightarrow f$ *hat an der Stelle* ξ *kein lokales Extremum.*

Beispiel $(n = 2)$

Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$Q_A(x, y) = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad D = \det A = ac - b^2$

Dann gilt die folgende Klassifizierung:

$$D > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 & \Rightarrow Q_A \text{ positiv definit} \\ a < 0 & \Rightarrow Q_A \text{ negativ definit} \end{cases}$$

$$D = 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \text{ oder } a = 0,\ c \geq 0 & \Rightarrow Q_A \text{ positiv semidefinit} \\ a < 0 \text{ oder } a = 0,\ c \leq 0 & \Rightarrow Q_A \text{ negativ semidefinit} \end{cases}$$

$$D < 0 \Rightarrow \quad Q_A \text{ indefinit}$$

Grund:

für $a \neq 0$ lässt sich das Vorzeichen von $aQ_A(x, y) = (ax + by)^2 + Dy^2$ ablesen

Beispiel:

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0, 0) \Leftrightarrow x^2 = y,\ y^2 = x$

$\Rightarrow x = 0, y = 0$ oder $x = 1, y = 1$

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$,

$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $D < 0$, Hesse-Matrix indefinit, kein Extremum

$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ $D = 36 - 9 = 27 > 0$, Hesse-Matrix positiv definit, $(1, 1)$ ist Stelle eines lokalen Minimums.

5 Implizit definierte Funktionen / Umkehrsatz

Erinnerung: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und $||A|| := \big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\big)^{\frac{1}{2}}$ die Norm der Matrix A.
Dann gilt: $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

5.1 Lipschitzbedingung und Nullstellensatz

Satz 5.1 (Lipschitzbedingung)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine C^1-Funktion mit $||Df(x)|| \leq L\ \forall x \in D$. Dann folgt

$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y||\ \forall x, y \in D \text{ für die } S_{xy} \subset D \text{ ist.}$$

Dabei ist S_{xy} die Verbindungsstrecke von x und y.

Bemerkung:

a) $A = (a_{ij}),\ A^k = (a_{ij}^k) \subset \mathbb{R}^{m \times n}$.

Dann gilt $||A - A^k|| \overset{k\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow a_{ij}^k \overset{k\to\infty}{\to} a_{ij}\ \forall i = 1, \dots, m,\ \forall j = 1, \dots, n$

b) $A, A^k \in \mathbb{R}^{n \times n},\ \det A \neq 0,\ ||A - A^k|| \overset{k\to\infty}{\to} 0$. Dann gilt:

A^k invertierbar für große k und $(A^k)^{-1} \overset{k\to\infty}{\to} A^{-1}$

Grund:

$\det A^k \overset{k\to\infty}{\to} \det A \neq 0$. Außerdem:

$\big(A^k\big)_{ij}^{-1} = \dfrac{(-1)^{i+j} M_{ji}^k}{\det A^k} \overset{k\to\infty}{\to} \dfrac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A} = \big(A\big)_{ij}^{-1}$,
wobei M_{ji} die Unterdeterminante ist, die durch Streichung der j-ten Zeile und i-ten Spalte entsteht.

Nullstellenproblem

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Gesucht: Nullstelle $f(x) = 0$.

Idee: Umformulierung als Fixpunktproblem; Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes

2 Varianten:

$x = x - \left[Df(x)\right]^{-1} f(x)$, falls $Df(x)$ invertierbar. $\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \left[Df(x)\right]^{-1} f(x_k)$	**oder**	$x = x - A^{-1} f(x)$, für geeignete invertierbare Matrix A $\Rightarrow x_{k+1} = x_k - A^{-1} f(x_k)$
(Newtonverfahren)		(vereinfachtes Newtonverfahren)

Satz 5.2 (Nullstellensatz)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei invertierbar und $\exists$ Kugel $B_r(a) \subset D$, sodass $F(x) := x - A^{-1} f(x)$ auf $B_r(a)$ einer Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante $L = \frac{1}{2}$ genügt. Falls $||A^{-1} f(a)|| < \frac{1}{2} r$, dann besitzt f in $B_r(a)$ genau eine Nullstelle.

5.2 Implizit definierte Funktionen

Beispielproblem:

Gegeben sei die Gleichung $f(x, y) = 0,\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Kann man $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ als „Funktionsgraphen“ $x = g(y)$ oder $y = h(x)$ darstellen?

Anders gesagt: kann man $f(x, y) = 0$ nach x oder y auflösen?

Beispiel (Auflösen von Hand): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Ellipsengleichung)

$E := \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ und $(x_0, y_0) \in E$ sei fest.

falls	$y_0 > 0 :$	$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$
falls	$y_0 < 0 :$	$y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$
falls	$y_0 = 0, x_0 = \pm a :$	keine eindeutige Auflösbarkeit nach y möglich

Aber, in der Nähe der Punkte $y_0 = 0$, $x_0 = \pm a$ ist die Auflösbarkeit nach x möglich:

$$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad (x_0 > 0)$$
$$x = -a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \quad (x_0 < 0)$$

Beachte: $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{b^2} \begin{cases} \neq 0 \rightarrow & \text{lokale Auflösbarkeit nach } y \\ = 0 \rightarrow & \text{keine lokale Auflösbarkeit nach } y \end{cases}$

Beschreibung der allgemeinen Situation:

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Elemente des $\mathbb{R}^{n+m} : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$

Das Gleichungssystem $f(x, y) = 0$ lautet ausführlich:

$$m \text{ Gleichungen} \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \end{cases}$$

Notation:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} (m \times n) \text{ Matrix,}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} (m \times m) \text{ Matrix}$$

Satz 5.3 (Satz über implizit definierte Funktionen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei eine C^1-Funktion. Für $(\xi, \eta) \in D$ gelte $f(\xi, \eta) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)$ sei invertierbar. Dann gilt:

$\exists$ offene Umgebungen $U(\xi) \subset \mathbb{R}^n$, $V(\eta) \subset \mathbb{R}^m$ mit $U(\xi) \times V(\eta) \subset D$ und eine C^1-Funktion $g : U(\xi) \rightarrow V(\eta)$ mit den Eigenschaften:

a) $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U(\xi)$ (Existenz)

b) Falls $f(x, y) = 0$ für ein $(x, y) \in U(\xi) \times V(\eta) \Rightarrow y = g(x)$ (Eindeutigkeit)

Zusatz: Ist $f \in C^k(D)$, so ist $g \in C^k(U(\xi))$

Anwendungen:

1) Differentialgeometrie:

   $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt Flächenstück, falls eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine bijektive C^1-Funktion $f : U \to S$ existieren mit der Eigenschaft:

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)}_{\text{Tangentialvektoren}} \text{ sind linear unabhängig } \forall (x,y) \in U$$

   Sei $S' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$, $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $P \in S'$.

   Frage: ist S' lokal um den Punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ ein Flächenstück?

   Antwort: Ja, falls $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

2) Lineare Algebra:

   $A \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ sei eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix mit dem einfachen Eigenwert λ_0 (d.h. $\dim N(A - \lambda_0 \cdot E) = 1$) und dem zugehörigen Eigenvektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|y_0\| = 1$.

   Frage: Für $\epsilon \in \mathbb{R}$ klein, besitzt $A + \epsilon B$ auch einen einfachen Eigenwert $\lambda(\epsilon)$?

   Amtwort: Ja, es gibt C^∞-Abbildungen $\epsilon \to \lambda(\epsilon)$, $\epsilon \to y(\epsilon)$ mit $\lambda(0) = \lambda_0$, $y(0) = y_0$, $\lambda'(0) = x_0^T B x_0$ so, dass $\lambda(\epsilon)$ einfacher Eigenwert von $A + \epsilon B$ ist mit zugehörigem normierten Eigenvektor $y(\epsilon)$.

5.3 Umkehrsatz

Erinnerung aus Analysis I:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$. Folglich ist f streng monoton, und die Umkehrfunktion $f^{-1} : I^* = f(I) \to I$ existiert und ist differenzierbar mit

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)} \text{ für alle } y \in I^*.$$

Im mehrdimensionalen Fall: $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ \xi \in D,\ \eta = f(\xi)$

Frage: Existieren Umgebungen $U(\xi),\ V(\eta)$, sodass $f : U(\xi) \to V(\eta)$ invertierbar ist?

Satz 5.4 (Satz über die Umkehrabbildung)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ sowie $\xi \in D$, $\eta = f(\xi)$ und $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi)$ sei invertierbar.

Dann exisitert eine offene Umgebung $U = U(\xi) \subset D$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $V = f(U)$ ist offene Umgebung von η

b) $f : U \to V$ ist bijektiv

c) $g := f^{-1} : V \to U$ ist differenzierbar auf V mit

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x)\Big)^{-1}, \; y = f(x)$$

Beispiele für Satz 5.3/5.4

1) $f(x, y) = e^{2x-3y} + 3x - 5y = 0, \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(3, 2) = 0, \quad f_y(3, 2) = -8 \neq 0$

$\exists$ Umgebung $U(3) \subset \mathbb{R}$, $V(2) \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $g : U(3) \to V(2)$ mit

$$f(x, g(x)) = 0 \;\forall x \in U(3)$$

Bestimmung von $g'(3)$:

$$\begin{array}{cccl} \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) & + & \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) & = 0 \\ 5 & + & (-8)g'(3) & = 0, \quad \text{also: } g'(3) = \frac{5}{8} \end{array}$$

2)

$$f(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} x^2 + y_1^2 - 2y_2^2 \\ x^2 + 2y_1^2 + y_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Spezielle Lösung: $\xi = 1, \eta = (1, 1)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ invertierbar , $\exists g : U(1) \to V(1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(x, g(x)) = 0$.

Bestimmung von $\frac{\partial g}{\partial x}(\xi)$:

$$\begin{array}{cccl} f(x, g(x)) = 0, & \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)) & + & \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(\xi) = 0 \\ & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(\xi) = \dots \end{array}$$

3) $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$, $\det(\ldots) = e^x \neq 0$

$\Rightarrow$ In jedem Punkt $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ ist f lokal invertierbar. Aber $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist nicht injektiv, denn $f(x,y) = f(x, y + 2\pi)$.

6 Extrema unter Nebenbedingungen

Beispiele:

a) Welcher Punkt des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ hat vom Punkt $(1, 1)$ den größten bzw. kleinsten Abstand?

   Minimiere/Maximiere die Funktion $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$

   für $(x, y) \in N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, wobei $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

b) Welches in den Einheitskreis einbeschriebene n-Eck hat maximalen Flächeninhalt?

   Flächeninhalt eines Dreiecks: $\frac{1}{2}\sin(\alpha_i)$, $\quad \alpha_i$=Innenwinkel, $0 < \alpha_i < \pi$.

   Maximiere $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \sin(\alpha_i)$

   für $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, 0 < x_i < \pi, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 2\pi\}$

6.1 Allgemeines Problem im Fall $n = 2$

Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1-Funktionen. Maximiere/Minimiere $f(x, y)$ für $(x, y) \in N := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$

f hat ein Maximum an der Stelle $(\xi, \eta) \in N$, falls gilt:

$$f(\xi, \eta) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in N$$

f hat ein Minimum an der Stelle $(\xi, \eta) \in N$, falls gilt:

$$f(\xi, \eta) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in N$$

Behauptung: Ist (ξ, η) Stelle eines lokalen Maximums/Minimums mit $\nabla g(\xi, \eta) \neq 0$, dann sind $\nabla f(\xi, \eta)$ und $\nabla g(\xi, \eta)$ linear abhängig.

Folgerung: (ξ, η) ist Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung N mit $\nabla g(\xi, \eta) \neq 0$

$\Rightarrow$Die Funktion $H(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ hat als Funktion von (x, y, λ) eine Nullstelle der Ableitung

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial H}{\partial(x, y)}(\xi, \eta, \lambda_0) = \nabla f(\xi, \eta) + \lambda_0 \nabla g(\xi, \eta) = 0; \quad \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}(\xi, \eta, \lambda_0) = g(\xi, \eta) = 0$

6.2 Der Fall $n \geq 2$

Satz 6.1 (Lagrange'sche Multiplikatorenregel)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}^m$ seien C^1-Funktionen mit $m < n$. f habe an der Stelle $\xi \in U$ ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Falls Rang$\frac{\partial g}{\partial x}(\xi) = m$ ist, dann existieren reelle Zahlen $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$, sodass die Funktion

$$H(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

an der Stelle (ξ, λ_0) eine Nullstelle der Ableitung hat, d.h. $DH(\xi, \lambda^0) = 0$.

Bemerkung: Die Zahlen $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ heissen Lagrange-Multiplikatoren

Beispiele:

a) $H(x, y, \lambda) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$\frac{\partial g}{\partial(x,y)}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ hat Rang 1.

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial H}{\partial(x,y)}(x, y, \lambda) &= \begin{pmatrix} 2(x-1) + 2\lambda x \\ 2(y-1) + \lambda y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \tfrac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) &= x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{1+\lambda}$, $y = \frac{1}{1+\lambda}$, $\quad \frac{2}{1+\lambda}^2 = 1$, d.h. $\lambda = \pm\sqrt{2} - 1$

mögliche Extremstellen: $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(x, y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Da f sein Minimum/Maximum auf N annimmt, folgt:

$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Punkt minimalen Abstands
$(x, y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ Punkt maximalen Abstands

b) $H(\alpha, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin(\alpha_i) + \lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - 2\pi\Big)$,

$U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x < \pi, i = 1, \dots, n\}$

Existenz eines Minimums ist gesichert auf der kompakten Menge:

$$\widetilde{N} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq \pi, \sum_{i=1}^{n} x_i = 2\pi\}$$

d.h., $f(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin(\alpha_i)$ nimmt Maximum auf $\widetilde{N}$ im Punkt $\overline{\alpha} \in \widetilde{N}$ an.

Nun zeigt man, daß $\overline{\alpha} \in N$ gilt:

1. Fall: Angenommen, $\overline{\alpha_i} = 0$ für ein i, d.h. es liegt höchstens ein $n-1$–Eck vor. Durch Hinzunehmen einer weiteren Ecke wird der Flächeninhalt echt größer. Widerspruch!

2. Fall: Angenommen, $\overline{\alpha_i} = \pi$ für ein i. Dann ist einer der Nachbarwinkel α_j kleiner als $\frac{\pi}{2}$. Ersetze α_i durch $\frac{\pi}{2}$ und α_j durch $\alpha_j + \frac{\pi}{2}$. Damit bleibt die Winkelsumme $= 2\pi$ erhalten, aber der Gesamt-Flächeninhalt wird echt größer, denn:

$\sin(\alpha_j) < \sin(\alpha_j + \frac{\pi}{2}) + 1 = \cos(\alpha_j) + 1 \quad (\alpha_j < \frac{\pi}{2})$

Widerspruch! Folglich ist $\overline{\alpha}$ Stelle eines Maximums von f über N.

Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \alpha_i}(\overline{\alpha}, \lambda_0) &= \frac{1}{2}\cos(\overline{\alpha_i}) + \lambda_0 &&= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\overline{\alpha}, \lambda_0) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} - 2\pi &&= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{\alpha}_1 = \ldots = \overline{\alpha}_n = \frac{2\pi}{n}$, d.h. das regelmäßige n-Eck maximiert den Flächeninhalt.

7 Wege und Kurven

7.1 Definitionen, Weglänge, Parametrisierungen

Beispiel:

$$\Phi : \begin{cases} [0, 2\pi] & \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ \qquad t & \mapsto \quad (r\cos t, r\sin t, at) \end{cases}$$

Φ heißt Weg, die Bildmenge $\Phi([0, 2\pi])$ heißt Kurve (hier: Schraubenlinie)

Definition 7.1 *Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.*

a) Ein Weg im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Funktion $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Bildmenge $\mathcal{C} = \Phi(I)$ heißt die von Φ erzeugte Kurve und Φ heißt Parametrisierung dieser Kurve.

b) Der Weg Φ heißt geschlossen, falls $\Phi(a) = \Phi(b)$ ist.

c) Φ heißt Jordanweg, falls Φ injektiv ist. Φ heißt geschlossener Jordanweg, falls $\Phi(a) = \Phi(b)$ und $\Phi|_{[a,b)}$ injektiv ist.

d) Φ heißt glatt, wenn $\Phi \in C^1(I)$ und $\Phi'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$ ist.

e) Φ heißt stückweise $\begin{cases} \text{glatt} \\ C^1 \end{cases}$ falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ gibt mit

$\Phi|_{[t_i, t_{i+1}]} \begin{cases} \text{glatt} \\ C^1 \end{cases}$ für $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

f) Eine Kurve $\mathcal{C}$ heißt Jordankurve/geschlossene Jordankurve, falls es eine Parametrisierung $\Phi : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ von $\mathcal{C}$ gibt, die ein Jordanweg/geschlossener Jordanweg ist.

Beispiele:

a) Die Strecke $\overline{ab}$ ist eine Jordankurve für $a \neq b$ mit der Parametrisierung:

$$\Phi(t) = a + t(b - a), \quad t \in [0, 1]$$

oder

$$\tilde{\Phi}(t) = a + t^2(b - a), \quad t \in [0, 1]$$

Achtung: Φ ist glatt, $\tilde{\Phi}$ ist nicht glatt.

b) Der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ ist eine geschlossene Jordankurve

$$\Phi(t) = (\cos t, sint) \quad \text{oder} \quad x = \cos(t),\ y = \sin(t)$$

analog die Ellipse

$$\tilde{\Phi}(t) = (a\cos t, b\sin t) \quad \text{oder} \quad x = a\cos(t),\ y = b\sin(t)$$

c) Zykloide (Kurve eines Punktes P auf einem in x-Richtung rollenden Rad)

Mittelpunkt$M$	(rt, r) (konstante Geschwindigkeit)
P	$\big(rt + a\sin t, r + a\cos t\big)$
Weg	$\Phi(t) = \big(rt + a\sin t, r + a\cos t\big), \quad t \in [0, \infty)$
Kurve (Zykloide)	$\mathcal{C} = \Phi([0, \infty))$

Ist Φ glatt?

$$\Phi'(t) = \big(r + a\cos t, -a\sin t\big)$$

Für $a = r$ ist $\Phi'(\pi) = 0$. Die Kurve ist also nicht glatt, falls $a = r$ ist.

Definition 7.2

Sei $I = [a, b]$ und $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Sei Z eine Zerlegung von I mit $a = t_0 < \ldots < t_p = b$ und $P\big(\Phi(t_0, \ldots, t_p)\big)$ der zu Φ und Z gehörige Polygonzug.

a) Länge des Polygonszug $l(Z, \Phi) = l(Z) := \sum_{i=1}^{p} ||\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})||$

b) Weglänge von Φ $L(\Phi) := \sup_Z L(Z)$, wobei Z beliebige Zerlegung von $[a, b]$ ist.

c) Der Weg Φ heißt rektifizierbar, falls $L(Z) < \infty$ ist.

Bemerkung: $L(\Phi) \in [0, \infty]$.

$\exists$ Folge von Zerlegungen Z^k, $\underbrace{|Z^k| \to 0}_{\text{Feinheitsmaß}}$ mit $L(\Phi) = \lim_{k\to\infty} l(Z^k)$

Proposition 7.3 (Eigenschaften der Weglänge)

Sei $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *ein Weg.*

a) $L(\Phi) \geq ||\Phi(b) - \Phi(a)||$

b) Ist Φ *Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante* M *(z.B.* $||\Phi'(t)|| \leq M$*), dann folgt*

$$L(\Phi) \leq M(b-a) < \infty.$$

c) $\Phi, \Psi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *seien rektifizierbare Wege. Dann gilt* $|L(\Phi) - L(\Psi)| \leq L(\Phi - \Psi)$

d) $\Phi_1 : [a,c] \to \mathbb{R}^n, \Phi_2 : [c,b] \to \mathbb{R}^n$ *seien rektifizierbare Wege mit* $\Phi_1(c) = \Phi_2(c)$*. Dann ist*

$$\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2 : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \begin{cases} \Phi_1(t), & a \leq t \leq c \\ \Phi_2(t), & c \leq t \leq b \end{cases} \end{cases}$$

rektifizierbar mit $L(\Phi_1 \oplus \Phi_2) = L(\Phi_1) + L(\Phi_2)$*.*

Definition 7.4

$\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *sei rektifizierbar. Dann ist* $\Phi : [a,t] \to \mathbb{R}^n,\ a < t \leq b$ *auch rektifizierbar und* $s(t) := L(\Phi|_{[0,t]})$ *heißt Weglängenfunktion. Setze* $s(a) = 0$*.*

Satz 7.5 *Sei* $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *rektifizierbarer Weg.*

a) $S : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ist stetig, monoton wachsend. Ist* Φ *Jordanweg, dann ist* s *streng monoton wachsend.*

b) Ist $\Phi \in C^1([a,b])$*, dann ist* s *stetig differenzierbar und*

$$s(t) = \int_a^t ||\Phi'(\tau)|| d\tau$$

Zusatz: Satz 7.5 b) gilt auch, falls der Weg Φ *stückweise* C^1 *ist.*

Beispiele:

a) Zykloide mit $r = a$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} ||\Phi'(t)||dt &= \int_0^{2\pi} \Big|\Big|\big(r + a\cos t, -a\sin t\big)\Big|\Big| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + a^2 + 2ra\cos t} dt \\
&\overset{r=a}{=} a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t}\, dt \overset{\cos t = \cos^2(\frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{t}{2})}{=} a\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\Big|\cos\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big| dt \\
&= 4a\int_0^{\pi} \cos\Big(\frac{t}{2}\Big) dt = 8a\sin\Big(\frac{t}{2}\Big)\Big|_0^{\pi} = 8a
\end{aligned}$$

b) Parabel (t, t^2), $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \Big|\Big|(1, 2\tau)\Big|\Big| d\tau = \int_0^t \sqrt{1 + 4\tau^2} d\tau \\
&\overset{2\tau = \sinh x}{=} \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{Arsinh}(2t)} \cosh^2 x\, dx = \frac{1}{8}\Big[\sinh(2x) + \frac{1}{4}x\Big]_0^{\operatorname{Arsinh}(2t)} \\
&= \frac{1}{4}\Big(2t\sqrt{1+4t^2} + \ln(2t + \sqrt{1+4t^2})\Big)
\end{aligned}$$

Definition 7.6 (äquivalente Parametrisierungen)

Sei $I = [a, b]$, $J = [a', b']$ und $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$, $\Psi : J \to \mathbb{R}^n$ seien Parametrisierungen derselben Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Φ, Ψ heißen äquivalent ($\Phi \sim \Psi$), falls eine stetige, monoton wachsende Bijektion $H : J \to I$ existiert mit $\Psi = \Phi \circ h$.

Bemerkung

a) $\sim$ ist Äquivalenzrelation.

b) $\Phi \sim \Psi \Rightarrow L(\Phi) = L(\Psi)$, denn wenn $Z' = (t_0, \ldots, t_p)$ Zerlegung von J ist, dann ist $Z = \big(h(t_0), \ldots, h(t_p)\big)$ Zerlegung von I mit $l(Z, \Phi) = l(Z', \Psi)$.

c) Sei $\Phi^- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ der durch $\Phi^-(t) := \Phi(a + b - t)$ definierte Weg. Dann ist $L(\Phi) = L(\Phi^-)$ (Übung), aber $\Phi \not\sim \Phi^-$.

Satz 7.7

Seien $\mathcal{C}$ Jordankurve und $\Phi : I \to \mathbb{R}^n, \Psi : J \to \mathbb{R}^n$ zwei zu $\mathcal{C}$ gehörige Wege. Dann existiert genau eine stetige Bijektion $H : J \to I$ mit $\Psi = \Phi \circ h$ und es folgt $\Phi \sim \Psi$ oder $\Phi \sim \Psi^-$.

Zusatz: Sind Φ, Ψ glatt, so ist $h \in C^1(J)$ und $h'(t) \neq 0 \; \forall t \in J$.

Bemerkung:

Für eine Jordankurve $\mathcal{C}$ gibt es genau 2 Äquivalenzklassen von zugehörigen Parametrisierungen durch Jordanwege. Eine Auswahl einer dieser Äquivalenzklassen heißt Orientierung von $\mathcal{C}$.

Korollar 7.8

Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ Jordankurve und Φ ein zugehöriger Jordanweg. Dann ist $L(\Phi)$ unabhängig von Φ. Man definiert die Länge der Jordankurve $L(\mathcal{C}) := L(\Phi)$.

Insbesondere gilt für $\Phi \in C^1([a,b])$

$$L(\Phi) = \int_a^b ||\Phi'(t)|| \, dt.$$

Bemerkung:

Die Aussagen bezüglich Definition 7.6, Satz 7.7 und Korollar 7.8 gelten auch für geschlossene Jordankurven. Betrachte dazu $\Phi : [a,b) \to \mathcal{C}$.

Satz 7.9 (Weglänge als Paramter)

Sei $\mathcal{C}$ eine rektifizierbare Jordankurve. Dann existiert eine Parametrisierung $\Psi : [0, L(\mathcal{C})] \to \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft $L(\Psi\big|_{[0,s]}) = s$. Ist $\mathcal{C}$ glatt, dann ist Ψ stetig differenzierbar mit $\|\Psi'(s)\| = 1$.

Physikalische Interpretation: $\Psi(s)$ Ortsvektor, $\Psi'(s)$ Geschwindigkeitsvektor, $||\Psi'(s)||$ Geschwindigkeit, mit der die Kurve $\mathcal{C}$ durchlaufen wird.

Beispiel:

$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad \Phi(t) := \big(\cos\sqrt{t}, \sin\sqrt{t}\big), \quad s \in [0, 4\pi^2]$

$||\Phi'(t)|| = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Weglängenfunktion $s(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\tau}} d\tau = \sqrt{t}$

$\Psi(x) = \Phi(x^2) = \big(\cos x, \sin x\big)$, $x =$ Weglänge als Parameter, $x \in [0, 2\pi]$, $\quad ||\Psi'(x)|| = 1$

7.2 Funktionen von beschränkter Variation

Definition 7.10

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $Z = (t_0, \ldots, t_p)$ *Zerlegung von* $[a, b]$*. Dann heißt*

$$Var(Z; f) = \sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1}| \text{ Variation von } f \text{ bezüglich } Z$$

$$V_a^b(f) = \sup_Z Var(Z; f) \text{ Totalvariation von } f$$

f *heißt „von beschränkter Variation“, falls* $V_a^b(f) < \infty$*. Schreibweise:* $f \in BV([a, b])$

Lemma 7.11 (Eigenschaften der Totalvariation)

a) $f \in BV([a, b]) \Rightarrow f$ *beschränkt,* $|f(b) - f(a)| \le V_a^b(f)$

b) $f, g \in BV([a, b]) \Rightarrow \lambda f + \mu g, f \cdot g \in BV([a, b])$ *und*

$$V_a^b(\lambda f + \mu g) \le |\lambda| V_a^b(f) + |\mu| V_a^b(g)$$

$$V_a^b(fg) \le ||f||_\infty V_a^b(g) + ||g||_\infty V_a^b(f)$$

c) f *monoton* $\Rightarrow V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$

d) f *Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante* $L \ge 0 \Rightarrow V_a^b(f) \le L(b - a)$

e) f *stückweise* $C^1 \Rightarrow V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$

f) $a < c < b$, $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$

Satz 7.12 (Darstellungssatz von Jordan)

$f \in BV([a, b]) \Leftrightarrow \exists$ *montone Funktionen* $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mit* $f = g - h$.

Satz 7.13 *Ein Weg* $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *ist rektifizierbar* $\Leftrightarrow$
jede der Komponentenfunktionen $\Phi_1, \ldots \Phi_n$ *gehört zu* $BV([a, b])$.

7.3 Riemann-Stieltjes-Integrale

Sei $I = [a, b]$, $Z = (t_0, \ldots, t_p)$ Zerlegung von I und $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_p)$, $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, p$ ein Zwischenvektor.

Definition 7.14

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen und Z, τ wie oben. Dann heißt

$$\sigma(Z, \tau, f dg) := \sum_{i=1}^{p} f(\tau_i)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big)$$

Riemann-Stieltjes-Summe. Falls es eine Zahl $J \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft: $\forall \epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ sodass

$$|J - \sigma(Z, \tau, f dg)| < \epsilon$$

$\forall$ Zerlegungen Z mit $|Z| < \delta$ und $\forall$ zugehörigen Zwischenvektoren τ, dann existiert das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_a^b f dg$ und hat den Wert J.

Bemerkung: Für $g(t) = t$ erhält man das Riemann-Integral.

Lemma 7.15

a) $$\left.\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_a^b (\lambda f_1 + \mu f_2) dg & = & \displaystyle\lambda \int_a^b f_1 dg + \mu \int_a^b f_2 dg \\ \displaystyle\int_a^b f d(\lambda g_1 + \mu g_2) & = & \displaystyle\lambda \int_a^b f dg_1 + \mu \int_a^b f dg_2 \end{array}\right\}$$ *falls die Integrale auf der rechten Seite existieren.*

b) Für $a < c < b$ gilt $\int_a^c f dg + \int_c^b f dg = \int_a^b f dg$, falls $\int_a^b f dg$ existiert.

Satz 7.16 (Partielle Integration)

Falls $\int_a^b f\, dg$ existiert, dann existiert $\int_a^b g\, df$ und es gilt:

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = fg\Big|_a^b$$

Satz 7.17 (Transformationssatz)

Sei $f \in R([a,b])$ und $g \in C^1([a,b])$. Dann existiert $\int_a^b f dg$ und es gilt:

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dt$$

Bemerkung: Gilt auch, falls g stetig und stückweise C^1 ist.

Satz 7.18

Sei $f \in C([a,b])$ und $g \in BV([a,b])$. Dann existiert $\int_a^b f dg$ und es gilt $\left|\int_a^b f dg\right| \leq ||f||_\infty V_a^b(g)$.

Ergänzung: Cauchy-Kriterium für die Existenz von $\int_a^b f dg$.

Falls $\forall \epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|\sigma(Z, \tau, f dg) - \sigma(Z', \tau', f dg)| < \epsilon$$

für alle Zerlegungen Z, Z' mit $|Z|, |Z'| < \delta$ und zugehörigen Zwischenvektoren τ, τ', dann existiert $\int_a^b f dg$ (vgl. Analysis I, Riemann-Integral).

Beispiel:

$H(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ Heavysidefunktion, $I = [a,b],\ a < 0 < b$.

Berechne $\int_a^b f\, dH$, falls f stetig auf I ist.

Sei Z Zerlegung von $[a,b],\ Z = (t_0, \ldots, t_p),\ t_{i_0} \leq 0 < t_{i_0+1}$ für geeignetes i_0.

τ sei zugehöriger Zwischenvektor. Dann gilt $\sigma(Z, \tau, f dH) = f(\tau_{i_0})(H(t_{i_0+1}) - H(t_{i_0})) = f(\tau_{i_0})$.

Falls $|Z| < \delta$ und δ so gewählt, dass $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ für $|s-t| < \delta,\ s, t \in I$

dann folgt $|\sigma(Z, \tau, f dH) - f(0)| < \epsilon$, also $\int_a^b f dH = f(0)$.

7.4 Kurven- und Wegintegrale

Definition 7.19 (Kurvenintegral)

Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ rektifizierbare Jordankurve, $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ zugehöriger Jordanweg und $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ sei eine gegebe Funktion. Dann heißt

$$\int^{\mathcal{C}} f(x)\, ds := \int_a^b f(\Phi(t)) ds(t)$$

Kurvenintegral von f über der Kurve $\mathcal{C}$.

Definition 7.20

Sei $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbarer Weg und $f : \Phi(I) \to \mathbb{R}$ bzw. $F : \Phi(I) \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$ seien gegeben. Dann heißt:

$$\int^{\Phi} f(x) dx_k := \int_a^b f(\Phi(t)) d\Phi_k(t)$$

Wegintegral von f bezüglich x_k längs Φ und

$$\int^{\Phi} F(x) \cdot dx = \int^{\Phi} F_1 dx_1 + \ldots + F_n dx_n := \sum_{k=1}^{n} \int^{\Phi} F_k(x) dx_k = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b F_k(\Phi(t)) d\Phi_k(t)$$

Wegintegral von F längs Φ.

Satz 7.21

a) Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ rektifizierbare Jordankurve und $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\int^{\mathcal{C}} f ds$ und ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung durch einen Jordanweg Φ.

b) Sei Φ rektifizierbarer Weg und $F : \Phi(I) \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann existiert $\int^{\Phi} F \cdot dx$.

Ist Ψ rektifizierbarer Weg und $\Phi \sim \Psi$ $(\Phi \sim \Psi^-)$, dann gilt

$$\int^{\Phi} F \cdot dx = \int^{\Psi} F \cdot dx \qquad \left(\int^{\Phi} F \cdot dx = -\int^{\Psi} F \cdot dx\right)$$

Satz 7.22 (Weitere Eigenschaften)

	Sei $\mathcal{C}$ rektifizierbare Jordan-Kurve und Φ zugehöriger Jordan-Weg $f, g : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ seien stetig	*Sei $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rektifizierbarer Weg $F, G : \Phi([a,b]) \to \mathbb{R}^n$ seien stetig*
(a)	$\left\lvert \int^{\mathcal{C}} f ds \right\rvert \leq L(\mathcal{C}) \max\limits_{\mathcal{C}} \lvert f \rvert$	$\left\lvert \int^{\Phi} F \cdot dx \right\rvert \leq L(\Phi) \cdot \max\limits_{[a,b]} \lvert\lvert F \circ \Phi \rvert\rvert$
(b)	$\int^{\mathcal{C}} (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int^{\mathcal{C}} f dx + \mu \int^{\mathcal{C}} g dx$	$\int^{\Phi} (\lambda F + \mu G) \cdot dx = \lambda \int^{\Phi} F \cdot dx + \mu \int^{\Phi} G \cdot dx$
(c)	*Φ stückweiser C^1 Weg* $\int^{\mathcal{C}} f ds = \int_a^b f\big(\Phi(t)\big) \lvert\lvert \Phi'(t) \rvert\rvert dt$	$\int^{\Phi} F \cdot dx = \int_a^b F\big(\Phi(t)\big) \cdot \Phi'(t) dt$
(d)	*$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ seien Jordan-Kurven, die nur einen Endpunkt gemeinsam haben, $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$* $\int^{\mathcal{C}} f ds = \int^{\mathcal{C}_1} f ds + \int^{\mathcal{C}_2} f ds$	*Φ_1, Φ_2 seien rektifizierbar, $\Phi := \Phi_1 \oplus \Phi_2$ (vgl. Prop 7.3 (d))* $\int^{\Phi} F \cdot dx = \int^{\Phi_1} F \cdot dx + \int^{\Phi_2} F \cdot dx$

7.5 Konservative Vektorfelder

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $F : D \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld.

Definition 7.23

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein Vektorfeld $D \to \mathbb{R}^n$ heißt:

a) *Gradientenfeld, falls eine stetig differenzierbare Funktion $V : D \to \mathbb{R}$ existiert mit $F = \nabla V$. V heißt Stammfunktion oder Potential von F.*

b) *konservativ, falls für jeden in D verlaufenden stückweisen C^1-Weg $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ das Wegintegral $\int^{\Phi} F \cdot dx$ nur von $\Phi(a)$ und $\Phi(b)$ abhängt. Schreibweise $\int^{\Phi} F \cdot dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} F \cdot dx$*

Satz 7.24

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (vgl. Exkurs Kapitel 3) und $F : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt:

$$F \text{ konservativ } \Leftrightarrow F \text{ ist ein Gradientenfeld}$$

In diesem Fall gilt außerdem:

a) *$V(x) := \int^{\Phi} F(y) \cdot dy$ ist Stammfunktion von F, wobei Φ ein beliebiger stückweiser C^1-Weg von einem festen Punkt $\xi \in D$ nach $x \in D$ ist.*

b) *Für jede Stammfunktion V von F gilt $\int^{\Phi} F(y) \cdot dy = V(x) - V(\xi)$, falls Φ ein stückweiser C^1 Weg von ξ nach x ist.*

Frage: Wie erkannt man, ob ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist?

Angenommen, $F = \nabla V = (F_1, \ldots, F_n)$, $V \in C^2(D)$.

Dann gilt nach dem Satz von Schwarz: $V_{x_i x_j} = V_{x_j x_i}$, d.h. $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$ für $i, j = 1, \ldots, n$.

Ist diese Bedingung hinreichend dafür, dass F ein Gradientenfeld ist?

Definition 7.25

Eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmiges Gebiet (Sterngebiet), falls $x_0 \in D$ existiert, sodass $\forall x \in D$ gilt, daß die Verbindungsstrecke von $x, x_0 = S_{xx_0} \subset D$ ist.

Satz 7.26

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Sterngebiet und $F : D \to \mathbb{R}^n$ sei ein Vektorfeld mit $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Dann ist F ein Gradientenfeld.

Satz 7.27 *Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g : \begin{cases} D \times [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{cases}$ sei stetig und stetig partiell nach $x \in D$ differenzierbar. Dann gilt für alle $x \in D$:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_a^b g(x,t)\, dt = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x_i}(x,t)\, dt,$$

d.h. Integration und partielle Differentiation sind vertauschbar.

8 Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1 Motivation: „Was ist eine Differentialgleichung?"

Für $t \in [0, \infty)$ sei $u(t)$ die Anzahl der Individuen einer Population zur Zeit t.

Ziel: Die Beschreibung des zeitlichen Verlaufs von $u(t)$ als Funktion von t.

Sei Δt ein Zeitraum (1 Jahr, 1 Monat,...). Dann gilt

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \cdot \rho,$$

wobei ρ die effektive Reproduktionsrate, d.h. $\frac{\text{Anzahl(Geburten - Todesfälle)}}{\Delta t}$ ist.

$$\frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \rho\big(t, \Delta t, u(t)\big)$$

Der Limes $\Delta t \to 0$ liefert ein vereinfachtes (idealisiertes) Modell:

$$\boxed{\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt} = \rho\big(t, u(t)\big)}$$

Die ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung. Dabei ist: $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene/bekannte Funktion, die die Abhängigkeit der effektiven Reproduktionsrate von der Zeit t und der Populationsgröße u beschreibt.

Beispiel (Modell des Populationswachstums von Verhulst, 1837):

$\chi(t, u) := \frac{\rho(t,u)}{u} =$ effektive Pro-Kopf Produktionsrate $= \alpha - \beta u, \quad \alpha, \beta \geq 0$

Fall $\beta = 0$ (konstante Pro-Kopf Reproduktionsrate):

$$\dot{u} = \alpha u, \quad \text{allgemeine Lösung: } u(t) = Ae^{\alpha t},\ A \in \mathbb{R}$$

$\Big[$Grund: $\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}u) = 0$, also $u(t) =$const$\cdot e^{\alpha t}\Big]$

Dabei ist die Konstante $A =$ Populationsgröße zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Population wächst exponentiell ($\alpha > 0$) oder fällt exponentiell ($\alpha < 0$).

Fall $\beta > 0$:

Die effektive Pro-Kopf Reproduktionsrate ist fallend in u (dies modelliert die Ressourcenverknappung)

$$\dot{u} = u(\alpha - \beta u) \quad \text{heißt logistische Differentialgleichung}$$

Setze $v(t) := \frac{\beta}{\alpha} u(\frac{1}{\alpha} t)$ und berechne die neue Differentialgleichung für $v(t)$:

$$\dot{v}(t) = \frac{\beta}{\alpha^2} u(t)\big(\alpha - \beta u(t)\big) = \frac{\beta}{\alpha}\Big(1 - \frac{\beta}{\alpha}\Big) = v(t)\big(1 - v(t)\big)$$

Es gibt die trivialen Lösungen $v \equiv 1,\ v \equiv 0$

Nichttriviale positive Lösungen:

$\frac{dv}{dt} = v(1-v) \Rightarrow \frac{dv}{v(1-v)} = dt$

$$\underbrace{\int \frac{dv}{v(1-v)}}_{\int \frac{1}{1-v} + \frac{1}{v}} = \int dt = t + const.$$

$$= \ln v - \ln|1-v| = \ln\Big(\frac{v}{|1-v|}\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{v}{|1-v|} = e^{t+const.} = ce^t$$

Ergebnis:

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{ce^t}{1+ce^t} & c > 0,\ \text{falls } v(0) \in (0,1) \\ \dfrac{ce^t}{ce^t - 1} & , c > 1,\ \text{falls } v(0) \in (1,\infty) \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{ce^{\frac{\alpha}{t}}}{1+ce^{\frac{t}{\alpha}}} & ,\ \text{falls } u(0) \in (0, \frac{\alpha}{\beta}) \\ \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{ce^{\frac{t}{\alpha}}}{ce^{\frac{t}{\alpha}} - 1} & ,\ \text{falls } u(0) \in (\frac{\alpha}{\beta}, \infty) \end{cases}$$

Wähle $c > 0$ so, dass $u(t_0) =$ Populationsgrösse zum festen Zeitpunkt t_0.

Eigenschaften der Lösungen:

$\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = \frac{\alpha}{\beta} =$ Tragekapazität der Umwelt

$u(t)$ ist monoton wachsend, solange $u(t) < \frac{\alpha}{\beta}$

$u(t)$ ist monoton fallend, solange $u(t) > \frac{\alpha}{\beta}$

Zwei verschiedene Lösungen kreuzen sich nie!

8.2 Explizite skalare Differentialgleichung erster Ordnung

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

heißt explizite skalare Differentialgleichung erster Ordnung.

Ist zusätzlich $(\xi, \eta) \in D$ gegeben, so heißt

$$y' = f(x, y),\ y(\xi) = \eta \tag{2}$$

Anfangswertproblem zu (1).

Definition 8.1 *Eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gegebene Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung von (1), falls*

a) y auf I differenzierbar ist und $\operatorname{graph} y := \Big\{\big(x, y(x)\big), x \in I\Big\} \subset D$,

b) $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$ gilt $\forall x \in I$.

y heißt Lösung des Anfangswertproblems (2), falls zusätzlich gilt

c) $\xi \in I$ und $y(\xi) = \eta$.

Spezialfall (Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen):

$$y' = f(x)g(y), \quad y(\xi) = \eta \tag{3}$$

Lösungsmethode (Begündung folgt im Satz 8.2):

$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

bzw.

$$\int_{\eta}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{\xi}^{x} f(t)dt \tag{4}$$

für die Lösung des Anfangswertproblems.

Satz 8.2

Seien I_x, I_y Intervalle und $\xi \in I_x$, $\eta \in I_y$. Die Funktionen $f : I_x \to \mathbb{R}$, $g : I_y \to \mathbb{R}$ seien stetig. Falls $g(\eta) \neq 0$, dann existiert eine Umgebung I von ξ, in der (3) genau eine Lösung hat. Man erhält die Lösung durch Auflösen von (4) nach $y(x)$.

Beispiele:

a) $y' = y^2$, $y(0) = 1$

$\frac{dy}{y^2} = dx, \quad \int_1^{y(x)} \frac{1}{s^2} dx = x$, d.h. $\frac{-1}{y(x)} + 1 = x, \quad y(x) = \frac{1}{1-x}$.

Die Lösung existiert auf dem Intervall $(-\infty, 1)$

b) $y' = \sqrt{|y|}, \quad y \equiv 0$ ist Lösung.

betrachte positive Lösungen:

$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx, \quad 2\sqrt{y(x)} = x + c \Rightarrow y(x) = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2, \quad x > -c$

Konstruktion negativer Lösungen:

$z(x) := -y(-x)$ löst die Differentialgleichung, denn $z'(x) = y'(-x) = \sqrt{y(-x)} = \sqrt{|z(x)|}$

<u>Zusammenkleben von Lösungen:</u>

z.B.: $\Phi_a(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & x \geq 0 \\ 0 & -a \leq x \leq 0 \\ -\frac{(x+a)^2}{4} & x \leq -a \end{cases}, \qquad a > 0.$

oder $\Psi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Insbesondere hat das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen.

Definition 8.3

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $g, h \in C(I)$. Die Differentialgleichung

$$y' + g(x)y = 0, \ x \in I \tag{H}$$

heißt homogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Für $h \neq 0$ heißt

$$y' + g(x)y = h(x), \ x \in I \tag{I}$$

inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Satz 8.4 (Lösung der homogenen Gleichung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$, $g \in C(I)$. Die Allgemeine Lösung von (H) ist

$$y(x) = ce^{-\int_\xi^x g(t)dt}, \ \xi \in I, \ c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems (H) mit $y(\xi) = \eta$ ist

$$y(x) = \eta e^{-\int_\xi^x g(t)dt}.$$

Satz 8.5 (Lösung der inhomogenen Gleichung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $g, h \in C(I)$.

a) Die allgemeine Lösungen von (I) hat die Form

$$y(x) = \underbrace{y_h(x)}_{\text{allgemeine Lösung von (H)}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{eine partikuläre Lösung von (I)}}$$

b) Man erhält für die allgemeine Lösung von (I):

$$(\star) \qquad y(x) = e^{-G(x)}\left(c + \int_\xi^x h(t)e^{G(t)}\,dt\right), \ G(t) := \int_\xi^t g(s)\,ds \text{ mit } \xi \in I, c \in \mathbb{R}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems (I) mit $y(\xi) = \eta$ lautet

$$(\star\star) \qquad y(x) = e^{-G(x)}\left(\eta + \int_\xi^x h(t)e^{G(t)}dt\right).$$

Bemerkung: Die Lösungmethode ist wichtiger als die Lösungsformel.

Beispiel: $y' + y \sin x = \sin^3 x$

homogene Gleichung: $y' + y \sin x = 0, \quad y_h(x) = e^{-\int \sin x dx} = ce^{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$.

inhomogene Gleichung: $y' + y \sin x = \sin^3 x$, Ansatz: $y_p(x) = c(x)e^{\cos x}$

$c'(x)e^{\cos x} = \sin^3 x$

$$\begin{aligned} c(x) &= \int e^{-\cos x} \sin^3 x dx & \overset{t=\cos x}{\underset{dt=-\sin x dx}{=}} & \int e^{-t}(t^2-1)dt \\ &= -e^{-t}(t^2-1) + \int e^{-t} 2t dt & = & -e^{-t}(t^2-1) - 2te^{-t} + 2\int e^{-t} dt \\ &= e^{-t}(1-t^2-2t-2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow y_p(x) = e^{\cos x} \cdot e^{-\cos x}(\sin^2 x - 2\cos x - 2) = \sin^2 x - 2\cos x - 2$

allgemeine Lösung: $y(x) = \sin^2 x - 2\cos x - 2 + ce^{\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$.

8.3 Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine gegebene Funktion.

Elemente des $\mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen wir mit $(x, y) = (x, y_1, \ldots, y_n)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}^n$.

$f(x, y) = \Big(f_1(x, y_1, \ldots, y_n), f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\Big)$

Dann heißt

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' &=& f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' &=& f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots& \\ y_n' &=& f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{array} \right. \qquad \text{kurz } y' = f(x, y)$$

System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Ist zusätzlich $(\xi, \eta) \in D$ gegeben, so heißt

$$y' = f(x, y), \; y(\xi) = \eta \tag{2}$$

Anfangswertproblem zu (1).

Definition 8.6 *Eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gegebene Funktion $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt Lösung von (1), falls*

a) y auf I differenzierbar ist und $\operatorname{graph} y := \Big\{\big(x, y(x)\big), x \in I\Big\} \subset D$,

b) $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$ gilt $\forall x \in I$.

y heißt Lösung des Anfangswertproblems (2), falls zusätzlich gilt

c) $\xi \in I$ und $y(\xi) = \eta$.

Beispiel (Räuber-Beute-Modell von A. Lotka und V. Volterra):

$u(t)$:=Größe der Beutepopulation zur Zeit t

$v(t)$:=Größe der Räuberpopulation zur Zeit t

$\dot{u}(t) = u(t)\chi\big(t, u(t), v(t)\big)$, $\quad \chi$ =effektive Pro-Kopf Reproduktionsrate Beute

$\dot{v}(t) = v(t)\lambda\big(t, u(t), v(t)\big)$, $\quad \lambda$ =effektive Pro-Kopf Reproduktionsrate Räuber

Einfachstes Modell:

$$\chi(t, u, v) = a - bv, \quad a, b \geq 0$$
$$\chi(t, u, v) = -c + du, \quad c, d \geq 0$$

Führt auf ein System erster Ordnung:

$$\dot{u} = u(a - bv)$$
$$\dot{v} = v(-c + du)$$

Bemerkung:

In Abwesenheit der Räuber ($v \equiv 0$) führt $\dot{u} = au$ zum exponentiellen Wachstum der Beute.

In Abwesenheit der Beute ($u \equiv 0$) führt $\dot{v} = -cv$ zum exponentiellen Aussterben der Räuber.

Zurück zum AWP: (2) $y' = f(x, y), \quad y(\xi) = \eta$, mit $f : \underbrace{[\xi, \xi + a] \times \mathbb{R}^n}_{S=\text{Streifen}} \to \mathbb{R}^n$, $a > 0$

Ziel: Entwicklung einer Lösungstheorie für (2)

Lemma 8.7 *Sei $f : S \to \mathbb{R}^n$ stetig und $I = [\xi, \xi + a]$.*

a) Ist y Lösung des Anfangswertproblems (2) auf I dann gilt

$$y(x) = \eta + \int_\xi^x f\big(t, y(t)\big)dt \quad \forall x \in I.$$

b) Ist $y \in C(I)$ Lösung der Integralgleichung

$$y(x) = \eta + \int_\xi^x f\big(t, y(t)\big)dt, \quad \forall x \in I \tag{3}$$

dann ist $y \in C^1(I)$ und y löst Anfangswertproblems (2) auf I.

Bemerkung:

Für eine vektorwertige Funktion $g : [\xi, \xi + a] \to \mathbb{R}^n$ bedeutet

$$\int_\xi^x g(t)dt = \Big(\int_\xi^x g_1(t)dt, \dots, \int_\xi^x g_n(t)dt \Big)$$

Ziel: Nachweis der Existenz einer Lösung von (3) mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes.

Vorbereitungen:

Sei $||\cdot||$ auf $\mathbb{R}^n$ die euklidische Norm. Betrachte für ein kompaktes Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ den Raum $C(I) = \Big\{ y : I \to \mathbb{R}^n, y \text{ stetig auf } I \Big\}$. Dann ist $\Big(C(I), ||\cdot||_\infty \Big)$ mit $||y||_\infty = \max\limits_{x \in I} ||y(x)||$ ein Banachraum (vgl. Satz 1.19 für $n = 1$). Sei nun eine zweite Norm auf $C(I)$ erklärt durch

$$||y||_\alpha = \max_{x \in I} e^{-\alpha x} ||y(x)||, \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$

Beachte: es gibt Zahlen $\rho, \sigma > 0$ mit $0 < \sigma \le e^{-\alpha x} \le \rho \quad \forall x \in I$, da I kompakt ist.

Es folgt: $\sigma ||y||_\infty \le ||y||_\alpha \le \rho ||y||_\infty$, d.h. $||\cdot||_\alpha$ und $||\cdot||_\infty$ sind äquivalente Normen auf $C(I)$. Insbesondere ist $\Big(C(I), ||\cdot||_\alpha \Big)$ ein Banachraum.

Lemma 8.8

Sei $z : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\Big| \int_a^b z(x)dx \Big| \le \int_a^b |z(x)|dx.$$

Definition 8.9 *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ und $|\cdot|$ eine Norm im $\mathbb{R}^n$.*

a) f heißt Lipschitz-stetig bezüglich y, falls $L > 0$ existiert mit

$$|f(x,y) - f(x,\overline{y})| < L|y - \overline{y}| \quad \forall (x,y), (x,\overline{y}) \in D.$$

b) f heißt lokal Lipschitz-stetig bezüglich y, falls $\forall (x_0, y_0) \in D$ ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$ existiert mit

$$|f(x,y) - f(x,\overline{y})| < L|y - \overline{y}| \quad \forall (x,y), (x,\overline{y}) \in D \text{ mit } |x - x_0|, |y - y_0|, |\overline{y} - y_0| < \delta.$$

Bemerkung:

1. Da im $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind, genügt es im Folgenden, die euklidische Norm zu betrachten.
2. Ist $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ konvex und $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ beschränkt auf $D \Rightarrow f$ ist Lipschitz-stetig bezüglich y (Korollar 3.16).

Satz 8.10 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

Sei $f : [\xi, \xi + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich y. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y), \quad y(\xi) = \eta \tag{2}$$

genau eine Lösung in $[\xi, \xi + a]$.

Bemerkung:

Falls $f : [\xi - a, \xi] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bzgl. y ist, so besitzt (2) genau eine Lösung auf $[\xi - a, \xi]$.

Satz 8.11

Sei $R = [\xi, \xi + a] \times [\eta_1 - b_1, \eta_1 + b_1] \times \ldots \times [\eta_n - b_n, \eta_n + b_n]$ und $f \in C(R)$ sei Lipschitz-stetig bzgl. y auf R. Dann existiert auf $[\xi, \xi + \alpha]$ genau eine Lösung des Anfangswertproblems (2), wobei

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b_1}{A}, \ldots, \frac{b_n}{A}\right\}, \quad A = \max_{i=1,\ldots,n} \max_{(x,y)\in R} |f_i(x,y)|.$$

Beispiele:

a) $n = 1,\ y' = \sin x e^{\arctan y} =: f(x,y),\ \ y(0) = \eta,\ \ S = [0,T] \times \mathbb{R}$

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{1}{1+y^2} e^{\frac{\pi}{2}} \leq e^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow f$ Lipschitz-stetig bzgl. y auf S.

$\Rightarrow \exists_1$ auf $[0,T]$ definierte Lösung,

Analog gilt für $S = [-T,0] \times \mathbb{R} : \exists_1$ auf $[-T,0]$ definierte Lösung.

b) $n = 1,\ y' = \sin x e^y =: f(x,y),\ y(0) = \eta,\ S = [0,T] \times \mathbb{R}$,

$f(x,y)$ ist nicht Lipschitz-stetig bzgl. y auf S. Allerdings ist $f(x,y)$ auf der Menge $R := [0,T] \times [\eta - b, \eta + b]$ Lipschitz-stetig bzgl. y.

$A = \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}} |f(x,y)| \leq e^{\eta+b},\ \alpha = \min\left\{T, \frac{b}{e^{\eta+b}}\right\} \Rightarrow \exists_1$ Lösung auf $[0,\alpha]$.

Lemma 8.12 *Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ stetig. Betrachte die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$.*

a) Ist y Lösung auf (a,b) und $\operatorname{graph}(y) = \Big\{\big(x, y(x)\big) : x \in (a,b)\Big\} \subset A \subset D$ und A kompakt, dann lässt sich y als Lösung auf $[a,b]$ fortsetzen.

b) y sei Lösung auf $[a,c]$ und z sei Lösung auf $[c,b]$ mit $y(c) = z(c)$.

Dann ist $w(x) = \begin{cases} y(x), & a \leq x \leq c \\ z(x), & c \leq x \leq b \end{cases}$ Lösung auf $[a,c]$.

Satz 8.13 (Lokale eindeutige Lösbarkeit)

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2) eine eindeutige „lokale“ Lösung, d.h $\exists \epsilon > 0$, sodass auf $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$ genau eine Lösung von (2) existiert.

Ziel: Fortsetzung einer „lokalen“ Lösung des Anfangswertproblems auf möglichst große Existenzintervalle.

Definition 8.14

Eine Lösung y des Anfangswertproblems (2) auf dem Intervall I heißt nicht-fortsetzbar, falls für <u>*jede*</u> *Lösung $\overline{y}$ von (2) auf dem Intervall $\overline{I}$ gilt:*

$$\overline{I} \subset I \textit{ und } y\Big|_{\overline{I}} = \overline{y}.$$

Satz 8.15 (Existenz nicht fortsetzbarer Lösungen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2) eine eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung.

Satz 8.16

Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. y. Für die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung y von (2) gilt:

a) y existiert „nach rechts“ auf $[\xi, b)$ $\quad$ ($b = \infty$) zugelassen.

b) Es gilt

(i) $b = \infty$
oder

(ii) $b < \infty$ *und* $\lim\limits_{x \to b-} ||y(x)|| = \infty$
oder

(iii) $b < \infty$ *und* $\operatorname{dist}\big((x, y(x)), \partial D\big) \overset{x \to b-}{\longrightarrow} 0$

Beispiel: (n=1)

$y' = y,$	$y(0) = 1,$	$D = \mathbb{R}^2$	$y(x) = e^x$ ex. auf $[0, \infty)$	Fall (i)
$y' = y^2,$	$y(0) = 1,$	$D = \mathbb{R}^2$	$y(x) = \frac{1}{1-x}$ ex. auf $[0, 1)$	Fall (ii)
$y' = \frac{1}{1-x} y,$	$y(0) = 1,$	$D = (-\infty, 1) \times \mathbb{R}$	$y(x) = \frac{1}{1-x}$ ex. auf $[0, 1)$	Fall (ii) und (iii)
$y' = -\frac{1}{2y},$	$y(0) = 1,$	$D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$	$y(x) = \sqrt{1-x}$ ex. auf $[0, 1)$	Fall (iii)

8.4 Homogene Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Schreibweise:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine $n \times n$-Matrix, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$. Wir betrachten Lösungen $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ von $(-\infty, \infty) \to \mathbb{C}^n$ (komplexwertige Lösungen sind hier zulässig) der Differentialgleichung

$$y' = Ay. \tag{H}$$

Ziel: Bestimmung aller Lösungen von (H)

Beachte: Für $f(t,y) := Ay$ gilt $||f(t,y) - f(t,\overline{y})|| = ||A(y-\overline{y})|| \leq ||A|| \cdot ||y - \overline{y}||$, d.h. die Funktion $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig bzgl. y.

Lemma 8.17 *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

a) Falls $\mu \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ ist, dann löst $e^{\mu t}v$ die Differentialgeichung (H). Ist $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so sind $\mathrm{Re}(e^{\mu t}v)$, $\mathrm{Im}(e^{\mu t}v)$ linear unabhängige <u>reelle</u> Lösungen von (H).

b) Falls A komplex diagonalisierbar ist, d.h. falls eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A existiert, dann lässt sich jede Lösung von (H) schreiben als

$$y(t) = \sum_{i=1}^{p} e^{\mu_i t} v_i,$$

wobei $\mu_1, \ldots, \mu_p$ die Eigenwerte von A sind und $v_i \in Kern(A - \mu_i \,\mathrm{Id})$.

Lemma 8.18 *Sei $J = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix}$ eine $r \times r$-Matrix, $\mu \in \mathbb{C}$, in Gestalt eines Jordankästchens. Dann ist die allgemeine Lösung $w(t)$ der Differentialgleichung*

$$w' = Jw$$

gegeben durch Linearkombinationen der r Lösungen:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} e^{\,\mu t}, \quad \begin{pmatrix}t\\1\\0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} e^{\,\mu t}, \quad \begin{pmatrix}\frac{t^2}{2}\\t\\1\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} e^{\,\mu t}, \ldots, \begin{pmatrix}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\\\frac{t^{r-2}}{(r-2)!}\\\vdots\\\frac{t^2}{2}\\t\\1\\0\end{pmatrix} e^{\,\mu t}$$

Satz 8.19

Sei $\mu \in \mathbb{C}$ k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A. Dann existieren k Lösungen von (H) der Form

$$y^i(t) = P^i(t)e^{\,\mu t}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \textit{wobei}$$

$P^i(t) = \left(p_1^i(t), \ldots, p_n^i(t)\right)^T$, *$p_j^i(t)$ = Polynom vom Grad $\leq i$. Der höchste auftretende Polynomgrad = (Größe des größten Jordankästchens zum Eigenwert μ)-1.*

Praktische Berechnung der Lösungen:

I) Berechnung der Matrix C mit $B = CAC^{-1}$, B = Jordan-Normalform von A und Verwendung von Lemma 8.18

oder

II) direkte Berechnung von k Lösungen wie folgt:

1. Schritt $y(t) = ve^{\,\mu t}$, $\quad v$ Eigenvektor zum Eigenwert μ.
2. Schritt $y(t) = (a_1 + a_2 t)e^{\,\mu t}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^n$. Bestimme a_1, a_2 durch Koeffizientenvergleich:
   $y'(t) = [\mu(a_1 + a_2 t) + a_2]e^{\,\mu t} = e^{\,\mu t}A(a_1 + a_2 t)$
   Notwendigerweise a_2 = Eigenvektor zum Eigenwert μ. Bestimme a_1.
3. Schritt $y(t) = (b_1 + b_2 t + vt^2)e^{\,\mu t}$, etc. Bestimme b_2, b_1 durch Koeffizientenvergleich

k. Schritt $y(t) = (c_1 + c_2 t + \ldots + c_k t^{k-1} + vt^k)e^{\,\mu t}$

bestimme $c_k, \ldots, c_1$ durch Koeffizientenvergleich.

Beispiel:

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(\mu \operatorname{Id} - A) = (\mu+1)^2(\mu-1)$$

$\mu = 1$: Eigenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Lösung: $e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mu = -1$: Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, Lösung: $e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Ansatz für 2. Lösung zum Eigenwert -1:</u>

$$y = \Big[a + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big] e^{-t}$$

$$y' = \Big[- \Big(a + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big] e^{-t} = \Big[Aa - t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big] e^{-t}$$

$\Rightarrow -a + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = Aa \Rightarrow$ löse das LGS: $(A+E)a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Ergebnis:</u> $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{neu}} + \Big[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big]$

Lösung: $\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) e^{-t}$

Berechnung reellwertiger Lösungen

Ist $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert der reellen $n \times n$-Matrix A, dann auch $\overline{\mu}$. Aus k Lösungen der Form $P(t)e^{\mu t}$ werden durch $\mathrm{Re}(P(t)e^{\mu t})$ und $\mathrm{Im}(P(t)e^{\mu t})$ $2k$ reellwertige Lösungen.

8.5 Allgemeine Theorie linearer Systeme

$$y' = A(t)y \tag{H}$$

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{I}$$

wobei $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n},\ b : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen sind und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Lemma 8.20 *Das Anfangswertproblem (I) mit $y(\tau) = \eta$ und $\tau \in I$ besitzt genau eine Lösung auf I.*

Definition 8.21
Ein System $\left\{y^{(1)}, \dots, y^{(n)}\right\}$ von n linear unabhängigen Lösungen $y^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, n$ von (H) heißt Fundamentalsystem. Schreibweise als Matrix (Fundamentalmatrix):

$$Y(t) = \left(y^{(1)}(t)\middle|\dots\middle|y^{(n)}(t)\right), \qquad y^{(i)}(t) = \textit{ Spaltenvektor.}$$

Satz 8.22

a) $\exists$ reellwertiges Fundamentalsystem für (H).

b) Die reellwertigen Lösungen von (H) bilden einen n-dimensionalen Unterraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Lemma 8.23 *Ist $Y(t)$ Fundamentalmatrix von (H), so ist $Y(t)$ invertierbar $\forall t \in I$.*

Satz 8.24 (Lösung des inhomogenen Systems, Variation der Konstanten)
Sei $Y(t)$ Fundamentalmatrix zu (H). Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(t)y + b(t),\ y(\tau) = \eta$$

gegeben durch

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(\tau)\eta + \int_\tau^t Y(t)Y^{-1}(s)b(s)ds.$$

8.6 Explizite skalare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Sei $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differentierbar. Für die i-ten Ableitungen nach x führen wir folgende Schreibweise ein:

$$u^{(i)}(x) = \frac{d^i}{dx^i} u(x)$$

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Dann heißt

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \tag{1}$$

explizite skalare Differentialgleichung n-ter Ordnung und

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}),\ u(\xi) = \eta_0,\ u'(\xi) = \eta_1, \dots, u^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1} \tag{2}$$

mit $(\xi, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in D$ heißt zugehöriges Anfangswertproblem.

Transformation auf ein System erster Ordnung

$$(1)\ u^{(n)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \Leftrightarrow (3) \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Es gilt: $u(x) \in C^n(I)$ ist Lösung von (1) $\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$ ist Lösung von (3).

Ferner gilt: $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in C(I)$ ist Lösung von (3) $\Rightarrow u(x) := y_1(x)$ ist Lösung von (1).

Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0 \tag{H}$$
$$u^{(n)} + a_{n-1}(x)u^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)u' + a_0(x)u = b(x) \tag{I}$$

$a_i, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Da zugehörige System lautet:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ -a_{n-1}(x)y_n - \ldots - a_0(x)y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}}_{=:A(x)} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Die Lösungen von (H) bilden einen n-dimensionalen Unterraum von $C^n(I)$; eine Basis heißt Fundamentalsystem.

Satz 8.25

Für die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit <u>konstanten</u> Koeffizienten sei $\mu_0 \in \mathbb{C}$ k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p(\mu)$ von A, d.h.

$$p(\mu) = a_0 + a_1\mu + \ldots + a_{n-1}\mu^{n-1} + \mu^n.$$

Dann besitzt (H) die k linear unabhängigen Lösungen $e^{\mu_0 x}, xe^{\mu_0 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\mu_0 x}$. Ist $\mu_0 = \alpha + \imath\beta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, so entsprechen der komplexwertigen Lösung $x^i e^{\mu_0 x}$ die beiden reellwertigen Lösungen $x^i e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ und $x^i e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

Satz 8.26

Die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung auf dem Intervall I mit stetigen Koeffizienten besitzt ein reelles Fundamentalsystem. Die reellwertigen Lösungen bilden einen n-dimensionalen Unterraum von $C^n(I;\mathbb{R})$.

Berechnung der Lösungen von (I)

Sei $Y(t)$ Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = Y(x)Y^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \end{pmatrix} + \int_\xi^x Y(x)Y^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(s) \end{pmatrix} ds \text{ (Variation der Konstanten)}$$

$u(x) := y_1(x)$ ist dann partikuläre Lösung von (I).

Es gilt: Allgemeine Lösung von (I) $= \underbrace{u_h}_{\text{allgemeine Lösung von (H)}} + \underbrace{u_p}_{\text{partikuläre Lösung von (I)}}$

Beispiel:

a) $u^{(iv)} - 2u''' + 2u'' - 2u' + u = 0,\; p(\mu) = \mu^4 - 2\mu^3 + 2\mu^2 - 2\mu + 1 = (\mu - 1)^2(\mu^2 + 1)$

Lösungen: $e^x, xe^x, e^{ix}, e^{-ix}$

reelle Lösungen: $e^x, xe^x, \cos x, \sin x$

b) $u'' + 2au' + bu = 0$ (gedämpfter harmonischer Oszillator)

charakteristisches Polynom: $p(\mu) = \mu^2 + 2a\mu + b$ mit $a, b > 0$.

Nullstellen: $\mu_{1/2} = -1 \pm \sqrt{a^2 - b}$.

1. Fall $a^2 > b$: $e^{(-a\pm\sqrt{a^2-b})x} \overset{x\to\infty}{\to} 0$ (Kriechfall)
2. Fall $a^2 = b$: $e^{-ax}, xe^{-ax} \overset{x\to\infty}{\to} 0$ (aperiodischer Grenzfall)
3. Fall $a^2 < b$: $e^{-ax}\cos(\sqrt{b - a^2}x), e^{-ax}\sin(\sqrt{b - a^2}x)$ (Schwingfall), gedämpfte Schwingung der Periode $\dfrac{2\pi}{\sqrt{b - a^2}}$

Inhomogener Fall zu 2. ($a^2 = b$):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ -2av - bu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{-ax} & xe^{-ax} \\ -ae^{-ax} & (1 - ax)e^{-ax} \end{pmatrix} = e^{-ax} \begin{pmatrix} 1 & x \\ -a & 1 - ax \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten: Ansatz $c(x)Y(x)$

$c'(x)Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$; $c'(x) = e^{ax} \begin{pmatrix} 1-ax & -x \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = e^{ax} \begin{pmatrix} -x^2 \\ x \end{pmatrix}$

$\int e^{ax}x = \dfrac{e^{ax}x}{a} - \int \dfrac{e^{ax}}{a} = e^{ax}(\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{a^2})$

$\int e^{ax}x^2 = \dfrac{e^{ax}}{a}x^2 - \dfrac{2}{a}\int e^{ax}x = e^{ax}\Big(-\frac{x^2}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{2}{a^3}\Big)$

$c(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{2}{a^3} \\ \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \end{pmatrix} e^{ax}$

Partikuläre Lösung

$c(x)Y(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{a} + \frac{2x}{a^2} - \frac{2}{a^3} + \frac{x^2}{a} - \frac{x}{a^2} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} - \frac{2}{a^3} \\ \dots \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung: $u(x) = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} + \dfrac{x}{a^2} - \dfrac{2}{a^3}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Zurück zur allgemeinen Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}),\ u(\xi) = \eta_0,\ u'(\xi) = \eta_1, \dots, u^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1} \tag{2}$$

Satz 8.27 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)

a) Sei $f : [\xi, \xi + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, Lipschitz-stetig in den hinteren n Variablen. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2) genau eine Lösung auf $[\xi, \xi + a]$. Gleiches gilt nach links, falls $f : [\xi - a, \xi] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

b) Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen $(\xi, \eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in den hinteren n Variablen. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2) genau eine nicht-fortsetzbare Lösung, die nach rechts auf $[\xi, b)$ existiert mit

$b = \infty$

oder $b < \infty$ *und* $\left\| \begin{pmatrix} u(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \right\| \overset{x \to b-}{\to} \infty$ *oder* $\operatorname{dist}\Big(\begin{pmatrix} x \\ u(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \partial D \Big) \overset{x \to b-}{\to} 0$

8.7 Die Matrixexponentialfunktion

Sei $A \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexe $n \times n$-Matrix, $||A|| = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Betrachte die Reihe (Folge der Partialsummen)

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Dabei sei $A^0 = E$ und $A^k = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-mal}}$.

Lemma 8.28

Sei $A \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Ist $\rho > 0$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ und $||A|| < \rho$, dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ konvergent in $\big(\mathbb{C}^{n\times n}, ||\cdot||\big)$.

Mit Lemma 8.28 ist $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ für alle $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiert.

Außderdem ist für alle $t \in \mathbb{R}$: $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ erklärt.

Da die gliedweise abgeleitete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kA^k t^{k-1}}{k!}$ ebenfalls für alle $t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert gilt:

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{tA}$$

Damit erhalten wir:

Satz 8.29

Sei $A \subset \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann besitzt das Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$y' = Ay$$

eine reelle Fundamentalmatrix der Form $Y(t) = e^{tA}$ mit der Eigenschaft $Y(0) = E$.

Proposition 8.30 *Seien* $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) $e^{B+C} = e^B e^C$, *falls* $BC = CB$

b) $e^{C^{-1}BC} = C^{-1}e^B C$, *falls* $\det C \neq 0$

c) $e^{\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1},\ldots,e^{\lambda_n})$, *wobei* $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

d) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

e) $e^{A(s+t)} = e^{As}e^{At}$

f) $e^{A+\lambda E} = e^{\lambda}e^A$

Erinnerung an Lemma 8.18

Ist $J = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix}$

dann gibt es für $w' = Jw$ ein reelles Fundamentalsystem der Form $\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} e^{\mu t}$.

Liefert e^{Jt} dasselbe Ergebnis?

$J = \mu E + F$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$, usw.

$$e^{Ft} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \text{ denn } F^k = 0 \text{ für } k \geq r,$$

d.h. die Exponentialreihe e^{Ft} ist nur eine endliche Summe. Also folgt $e^{Jt} = e^{\mu(E+F)t} = e^{\mu t}e^{Ft}$. Dieses Fundamentalsystem ist bereits in Lemma 8.18 erkannt worden.

9 Ausblick auf Analysis III – Flächen-/Volumenintegrale

Definition 9.1

Seien $h_1, h_2 \in C([a,b])$ *mit* $h_1(x) \leq h_2(x)\ \forall x \in (a,b)$. *Dann heißt die Menge*

$$A := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\Big\}$$

Normalbereich bzgl. der x*-Achse und*

$$B := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\Big\}$$

Normalbereich bzgl. der y*-Achse.*

Ist $f : A \to \mathbb{R}$ *bzw.* $f : B \to \mathbb{R}$ *stetig, so definiert man das Flächenintegral*

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dy\Big)dx$$

bzw.

$$\int_B f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\Big)dy$$

Bemerkung:

Die Abbildung $\left\{\begin{array}{rcl} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy \end{array}\right.$ ist stetig, also insbesondere Riemann-integrierbar auf $[a,b]$.

Definition 9.2

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ *Normalbereich bzgl.* x*- oder* y*-Achse. Dann heißt*

$$|A| = \int_A 1 d(x,y)$$

Flächeninhalt von A.

Im Falle des Normalbereichs bzgl. der x*-Achse gilt*

$$|A| = \int_a^b h_2(x) - h_1(x)dx$$

Dies entspricht der elementargeometrischen Vorstellung des Riemann-Integrals.

Beispiel:

1. $$\begin{aligned} \mathbb{D}_\rho &:= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \rho^2\Big\} \\ &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\rho \leq x \leq \rho,\ -\sqrt{\rho^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{\rho^2 - x^2}\Big\} \end{aligned}$$
   $$|\mathbb{D}_\rho| = \int_{-\rho}^{\rho} 2\sqrt{\rho^2 - y^2}dy = 2\rho^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - z^2}dz \overset{z=-\cos t}{=} 2\rho^2 \int_0^\pi \sin^2 t dt = \pi\rho^2,$$ denn
   $\int \sin^2(t) = \frac{t - \sin t \cos t}{2}$.
2. A=Dreieck im ersten Quadranten mit Eckpunkten $(0,0), (0,1), (1,0)$
   $$\begin{aligned} \int_A x^2 y d(x,y) &= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} x^2 y dy\Big)dx = \int_0^1 x^2 \frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^2(1 - 2x + x^2)}{2} dx = \frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

Übertragung auf 3 Dimensionen

Definition 9.3

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ Normalbereich bzgl. x- oder y-Achse und seien $g_1, g_2 \in C(A; \mathbb{R})$. Dann heißt

$$C = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\Big\}$$

Normalbereich bzgl. der x,y-Ebene. Ist $f : C \to \mathbb{R}$ stetig, so definiert man

$$\int_C f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_A \Big(\int_{g_1(x,y)}^{g_2 x,y} f(x,y,z)dz\Big)d(x,y)$$

und $|C| = \int_C 1 d(x,y,z)$ heißt Volumen von C.

Bemerkung:

In ähnlicher Weise erklärt man 3-dimensionale Normalbereiche bzgl. der x,z- oder y,z-Ebene.

Veranschaulichung des Volumen-Begriffs:

$A = [a,b] \times [c,d]$, d.h. $h_1(x) = c,\ h_2(x) = d$

$g_1(x,y) := 0,\ g_2(x,y) > 0$

$$|C| = \int_A g_2(x,y)d(x,y) = \int_a^b \Big(\int_c^d g_2(x,y)dy\Big)dx \approx \sum_{j=1}^n \frac{b-a}{n} \int_c^d g_2(a + \frac{j}{n}(b-a), y)dy$$

Summe der Volumina von Scheiben der Dicke $\frac{b-a}{n}$, wobei die Querschnittsfläche durch $y \mapsto g(a + \frac{j}{n}(b-a), y)$, $y \in [c,d]$ gegeben ist.

Beispiel: Kugelvolumen

$$\begin{aligned} C &= \Big\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\Big\} \\ &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{D}_R : -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |C| &= \int_{\mathbb{D}_R} 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d(x,y) = \int_{-R}^R \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy\Big)dx \\ &= \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) = \pi(2R^3 - \frac{2}{3}R^3) = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Eigenschaften von Flächen-/Volumenintegralen

Sei A ein zwei- bzw. dreidimensionaler Normalbereich und $f, g \in C(A;\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x = (x_1, x_2)$ oder $x = (x_1, x_2, x_3)$. Dann gilt:

a) $\displaystyle\int_A (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_A f dx + \beta \int_A g dx$

b) $\displaystyle\Big|\int_A f dx\Big| \le \int_A |f| dx \le ||f||_\infty |A|$

c) aus $f \le g$ folgt $\displaystyle\int_A f\,dx \le \int_A g\,dx$