KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

WS 2010/11
5.11.2010

Analysis I

3. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 12.11.2010, 13:00 Uhr.

Aufgabe 1

a) Es sei A eine nicht leere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Für $-A = \{-a : a \in A\}$ zeige man: $-A$ ist nach oben beschränkt und $\sup(-A) = -\inf(A)$.

b) Es sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt mit $\inf A > 0$ und $B := \{b \in \mathbb{R} : \frac{1}{b} \in A\}$. Zeigen Sie, daß B nach oben beschränkt ist mit $\sup B = \dfrac{1}{\inf A}$.

Aufgabe 2 (K)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen ein Infimum, Supremum, Minimum bzw. Maximum haben, und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte.

a) $\left\{(-1)^n - \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

b) $\left\{\dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1+(-1)^k}{2k} : k \in \mathbb{N}\right\}$,

c) $\left\{\dfrac{|x|x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\right\}$,

d) $\left\{y + \dfrac{1}{y} : y \in \left(\dfrac{1}{2}, 2\right]\right\}$.

Aufgabe 3 (K)

Berechnen Sie in a) - c) jeweils $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$. Bestimmen Sie in d) alle $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung lösen.

a) $z = (i-1)^3$,

b) $z = \dfrac{1-3i}{1-i}$,

c) $z = \dfrac{12+5i}{2+3i}$,

d) $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene.

a) $M = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 3\}$,

b) $M = \{z \in \mathbb{C} : |z+1-i| = |z-3+4i|\}$,

c) $M = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leqslant |z+1|\}$,

d) $M = \{z \in \mathbb{C} : 2z\overline{z} + iz - i\overline{z} - 1 = 0\}$.