KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

WS 2010/11
19.11.2010

Analysis I

5. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 26.11.2010, 13:00 Uhr.

Aufgabe 17

Bestimmen Sie jeweils $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ der im folgenden definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n := \sqrt[n]{n + (-1)^n \cdot n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

b) $a_n := \left(\dfrac{n + (-1)^{n-1}}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 18

a) Es konvergiere $\sum_{k\geqslant 1} a_k$ absolut und $(b_k)_{k\geqslant 1}$ sei eine beschränkte Folge. Man zeige, dass dann auch $\sum_{k\geqslant 1} a_k b_k$ absolut konvergiert.

b) Man finde eine konvergente Reihe $\sum_{k\geqslant 1} a_k$ und eine beschränkte Folge $(b_k)_{k\geqslant 1}$, so dass $\sum_{k\geqslant 1} a_k b_k$ divergiert.

Aufgabe 19 (K)

Welche der folgenden Reihen konvergiert, konvergiert absolut oder divergiert? Dabei sei $k \in \mathbb{N}$.

a) $\displaystyle\sum_k \binom{2k}{k}^{-1}$

b) $\displaystyle\sum_k (-1)^k \frac{k}{2k+3}$

c) $\displaystyle\sum_k (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

d) $\displaystyle\sum_k (-1)^k \frac{k!}{k^k}$

e) $\displaystyle\sum_k \frac{k+4}{2k^2 - 3k + 3}$

Aufgabe 20 (K)

a) Beweisen Sie den Cauchyschen Verdichtungssatz:

Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$, deren Glieder positiv und monoton fallend sind, konvergiert genau dann, wenn die “verdichtete Reihe” $\sum_{n=0}^\infty 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$ konvergiert.

b) Es sei $\alpha \in [0, 2)$ (rational). Folgern Sie: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ ist für $1 < \alpha < 2$ konvergent und für $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ divergent.