KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

WS 2010/11
10.12.2010

Analysis I

8. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 17.12.2010, 13:00 Uhr.

Aufgabe 29

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $U_{x_0} := \{\exp(2\pi i n x_0) : \ n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Gruppe bezüglich der (komplexen) Multiplikation.

b) Es gelte $x_0 = \frac{1}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}$. Wie lautet die Ordnung von U_{x_0}?

c) Es gelte $x_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Wie lautet die Ordnung von U_{x_0}?

Aufgabe 30

In $\mathbb{C}$ betrachte man die von dem Parameter $c \in \mathbb{R}$ abhängenden Geraden

a) $g_c = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}(z) = c\}$,

b) $h_c = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) = c\}$.

Man bestimme die Bilder dieser Geraden unter der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Man zeichne die Kurven

a) $\exp(g_c)$ für $c = -2, -1, 0, 1, 2$.

b) $\exp(h_c)$ für $c = \frac{k}{4\pi}$, $k = 0, 1, \dots, 7$.

Aufgabe 31 (K)

Entwickeln Sie folgende Funktionen in Potenzreihen um den Entwicklungspunkt x_0, und bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius.

a) $f(x) = \dfrac{3x}{x+4}$, $x_0 = 0$,

b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 3}$, $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

Aufgabe 32 (K)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen sowie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Potenzreihe konvergiert.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, x^n,$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} ,$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, n!}{n^n}\, x^n,$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\, x^{n^2} .$