KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

WS 2010/11
17.12.2010

Analysis I

9. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 07.01.2011, 13:00 Uhr.

Hinweis

Als Bachelorstudent muss man sich für den Analysis-1-Schein online anmelden, über das Studierendenportal studium.kit.edu . Zeitraum für die Anmeldung ist 1.12.2010 bis 12.2.2011.

Als Lehramtsstudent oder Diplomstudent muss man sich nicht und kann man sich nicht online anmelden. Vielmehr wird der Schein in Papierform ausgestellt, und die Anmeldung zum Schein ist schon durch die Anmeldung in den Tutorien erfolgt.

Aufgabe 33

(1) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß f genau dann stetig ist, wenn f stetig in 0 ist.

(2) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0, und es gebe ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ mit $f(x) = f(ax)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß f konstant ist.

Aufgabe 34

Zeigen Sie, dass die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (siehe Aufgabe 22 von Übungsblatt 6) stetig und strikt wachsend ist. Bestimmen Sie ihre Bildmenge $\sinh(\mathbb{R})$ und zeigen Sie, dass sinh eine stetige, strikt wachsende Umkehrfunktion besitzt, die "Area Sinus Hyperbolicus" genannt wird, und mit Arsinh abgekürzt wird. Leiten Sie eine explizite Formel für Arsinh her, in dem Sie die Funktion mit Hilfe des Logarithmus ausdrücken.

— bitte wenden —

Aufgabe 35 (K)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^{3/2} - x^{3/2}}{\sqrt{x}}$, **b)** $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^3+27}{x^4-81}$,

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist:

d) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 4}, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}, \\ \dfrac{3x - 10}{x + 2}, & \text{falls } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Aufgabe 36 (K)

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{\cos(x)} + x^7 = -\sin(e^{3x})$$

mindestens eine Lösung $x_0 \in \mathbb{R}$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\sin(x) = e^{-x}$$

genau eine Lösung $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ besitzt.