KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

WS 2010/11
14.01.2011

Analysis I

11. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 21.01.2011, 13:00 Uhr.

Aufgabe 41 (K)

(1) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, daß $g \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

(2) Zeigen Sie, daß die im folgenden definierten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, und berechnen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(x)$.

a) $f(x) := (x^2 + 1)e^{x^5}$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

b) $f(x) := |x^2 - 4|^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) Bestimmen Sie jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

a) $f(x) := \begin{cases} x^4 - 2x^3 + x^2 & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

b) $f(x) := \begin{cases} x^k\, e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 42

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei in D n-mal differenzierbare Funktionen. Man beweise durch vollständige Induktion nach n die folgenden Beziehungen:

a) Die Leibnizsche Formel

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

b)

$$f(x)\frac{d^n g(x)}{dx^n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(f^{(k)}(x)g(x)\right).$$

Aufgabe 43

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$g(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ x^2 \cos(1/x), & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}.$$

Man zeige, dass g in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

Aufgabe 44 (K)

Zeigen Sie für alle $y > x > 0$:

a) $e^{y^2} - e^{x^2} \leq (y-x)(x+y)e^{y^2}$,

b) $e^{1/x} - e^{1/y} \leq (y-x)\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$,

c) $y \log y - x \log x \leq (y-x)(1 + \log y)$.

Prüfungsankündigung *Bachelor-Modulprüfung* Analysis 1, nur für Physikstudenten

Die Klausur zur Analysis 1 (Bachelor-Modulprüfung) findet statt am

Mittwoch, den 23. März 2011, 8-10 Uhr.

- Studierende der PHYSIK, die die Bachelor-Modulprüfung (Abschlußklausur) ablegen möchten, müssen sich über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende) dazu anmelden.

Beachten Sie bitte in jedem Fall den

Anmeldeschluß: 23. Februar 2011.

Alle Informationen zur BACHELOR-MODULPRÜFUNG ANALYSIS 1/2 UND ANALYSIS 3 finden Sie auch unter

`http://www.math.kit.edu/iana3/~schmoeger/seite/termin/de`

Link zum QISPOS: `https://studium.kit.edu/`