KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. Lutz Weis
Dr. Christoph Kriegler

WS 2010/11
28.01.2011

Analysis I

13. Übungsblatt

Abgabe: bis Freitag, den 04.02.2011, 13:00 Uhr.

Aufgabe 49

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe Riemannscher Summen.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin(k\pi/n)$,

Aufgabe 50 (K)

Es sei $f \in C(\mathbb{R})$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$f_n(x) := n \int_0^{1/n} f(x+y)\,dy.$$

(1) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$, daß f_n differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung f_n'.

(2) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf jedem beschränkten und abgeschlossenem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 51 (K)

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^{\sqrt{\log 10}} x e^{-x^2}\,dx$,

b) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx$,

c) $\int_1^{e} \frac{\log x}{x}\,dx$,

d) $\int_0^{\pi/2} e^{\cos x} \sin x\,dx$,

e) $\int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{6-2x^3}}\,dx$,

f) $\int_0^{\pi} e^{-x} \cos(2x)\,dx$,

g) $\int_1^{4} e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Aufgabe 52

a) Berechnen Sie folgendes Integral

$$\int_0^1 \frac{2x^5 - x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 20x - 8}{x^4 + 2x^2 + 8x + 5} dx$$

b) Berechnen Sie jeweils das unbestimmte Integral

(i) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^4} dx,$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4} dx,$

(iii) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx.$