KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2011/12
27.10.2011

Analysis I

2. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 03.11.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 5 (K)

(a) Geben Sie in (i) - (iii) jeweils Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : A \to B$ so an, dass gilt:

(i) $f : A \to B$ surjektiv aber nicht injektiv.

(ii) $f : A \to B$ mit A überabzählbar sowie $f(A)$ abzählbar unendlich.

(iii) $f : A \to B$ mit den Eigenschaften aus (i) und (ii).

(b) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abzählbaren Mengen. Zeigen Sie, dass

$$M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

eine abzählbare Menge ist.

Aufgabe 6 (K)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}, \qquad \frac{n^3 + 5n}{6} \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 7

Es seien

$$M := \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{und} \quad \tilde{M} := \left\{ \frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : M \to \tilde{M}$, definiert durch $g\left(\frac{1}{n}\right) := \frac{1}{1+n}$, bijektiv ist.

(b) Es sei zusätzlich

$$f(x) := \begin{cases} g(x), & x \in M \\ x, & x \in [0,1] \setminus M \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass $f : [0,1] \to [0,1)$ bijektiv ist.

Aufgabe 8

Einem renomierten Genetiker (stolzer Besitzer einer grauen Katze) ist nach jahrelanger Forschung endlich ein wissenschaftlicher Beweis für die These "Alle Katzen sind grau" gelungen.

Behauptung: Ist M eine endliche Menge, so gilt $a = b$ für alle $a, b \in M$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Hat M genau ein Element, so ist die Aussage richtig.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei richtig für alle Mengen mit genau n Elementen. (IV)

Induktionsschluss: Es sei M eine Menge mit genau $n + 1$ Elementen. Entfernt man aus M ein Element a, so erhält man eine n-elementige Menge in der nach (IV) alle Elemente gleich sind. Fügen wir a wieder hinzu und entfernen ein anderes Element b so erhalten wir wieder eine n-elementige Menge, in der nach (IV) alle Elemente gleich sind. Daraus folgt nun $a = b$ und damit sind alle Elemente der Menge M gleich.

Was ist falsch an diesem Beweis?