KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2011/12
03.11.2011

Analysis I

3. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 10.11.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 9

Geben Sie in (a) bis (e) reelle Folgen mit den jeweiligen Eigenschaften an.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sowie $a_{2n} = b_{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(e) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind jeweils divergent sowie $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 10 (K)

Überprüfen jeweils die angegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Geben Sie im Fall der Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so an, dass für alle $n \geqslant n_0$ gilt: $|a_n - a| < 10^{-4}$.

(a) $a_n := \dfrac{1}{n^2}\dbinom{n}{n-2} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$,

(b) $a_n := \dfrac{n^5 + 36n^4 - 3n^2 - 14}{3n^5 + 9n^3 + 6n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(c) $a_n := \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(d) $a_n := \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cdot \dbinom{n}{n-2} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$.

Aufgabe 11 (K)

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Die Folge $(a_{n-k+1})_{n\geqslant\max\{k,1\}}$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-k+1} = a$.

(b) Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(\tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass $(b_n \cdot \tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(c) Es sei $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. Zeigen Sie, dass eine konvergente Folge $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ existiert mit $c(\mathbb{N}) \subseteq C$ und $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \inf(C)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 12

(a) Es sei $r \in \mathbb{R}$ und die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = r \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$$

gegeben. Finden und beweisen Sie eine explizite Darstellung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \geqslant 2$. Für welche Werte von $r \in \mathbb{R}$ konvergiert bzw. divergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Begründen Sie ihre Antwort.

Hinweis: Sie können ohne Beweis folgende Aussage verwenden: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\textit{Die Folge } (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ mit } d_n := x^n \textit{ konvergiert} \iff x \in (-1, 1].$$

(b) Sei $N \in \mathbb{N}$ und seien $b_1, b_2, \ldots, b_N > 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$c_n := \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{N} b_k^n},$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.