

Analysis I

4. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 17.11.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 13

Geben Sie in (a) bis (f) jeweils eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den genannten Eigenschaften an.

(a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton und divergent.

(b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt und $H(a_n) \neq \emptyset$.

(c) $H(a_n) = \{\alpha\}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) $H(a_n) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden.

(e) $H(a_n)$ ist abzählbar unendlich.

(f) $H(a_n) = [0, \infty)$.

Aufgabe 14 (K)

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

(a) Sei zusätzlich $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $b_k \in H(a_n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k \in H(a_n).$$

(b) Es seien $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b < c$. Zeigen Sie:

$$(b, c) \subseteq H(a_n) \implies b, c \in H(a_n).$$

Aufgabe 15

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Ferner sei $\ell \in \mathbb{N}$ fest und $(a_{n_k^{(1)}})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (a_{n_k^{(\ell)}})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergente Teilfolgen von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{\ell} \{n_k^{(i)} : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$$

und Grenzwerten $\alpha_i := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k^{(i)}}$.

Zeigen Sie:

$$H(a_n) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}.$$

Aufgabe 16 (K)

(a) Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := (-1 + (-1)^{n-1})(-1)^{2n+1} \quad \text{und} \quad b_n := (-1)^n \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n-1}.$$

Bestimmen Sie $H(a_n)$ und $H(b_n)$.

(b) Es sei $x \in (0, \infty)$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 > \sqrt{x} \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{x}{a_n} \right).$$

Zeigen Sie: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{x}$.

(Hinweis zu (b): Nutzen Sie das Monotoniekriterium.)

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.