KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2011/12
17.11.2011

Analysis I

5. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 24.11.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 17 (K)

Bestimmen Sie für die angegebenen Folgen die Menge der Häufungswerte und gegebenenfalls $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ sowie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(a) $$a_n := \begin{cases} 2 + \frac{1-n}{n}\ , & n = 3k-1 \\ 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 3k-2\ , \\ 2 + \sqrt[n+1]{2}, & n = 3k-3 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

(b) $a_n := \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k, \qquad (n \in \mathbb{N})$

(c) $a_n := \sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}, \qquad (n \in \mathbb{N})$

Aufgabe 18

Geben Sie in (a) bis (e) an ob die gemachten Aussagen wahr oder falsch sind. Dabei sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ immer eine reelle Folge.

(a) Es existiert eine Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_{2k} > 0$ und $a_{2k-1} < 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Es existiert eine Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n < \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

(c) Es existiert eine Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass für ein $p \in \mathbb{N}$ die Folge $(a_n - a_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist.

(d) Es existiert eine Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die unbeschränkt ist.

(e) Es existiert eine unbeschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die eine Cauchyfolge als Teilfolge besitzt.

Aufgabe 19 (K)

(a) Überprüfen Sie die angegebenen Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Reihenwert.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$, $\qquad$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}+1}{2^k}$.

— bitte wenden —

(b) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_k := \left(\frac{3}{2-x}\right)^k$. Bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und berechnen Sie dann den Reihenwert.

Aufgabe 20

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

(a) Sei $q \in (0,1)$. Zeigen Sie:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} : \ |a_{n+1} - a_n| < q^n \implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent.}$$

(b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und $a_n \geqslant 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \implies \lim_{n \to \infty} n a_n = 0.$$

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.