

Analysis I

6. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 01.12.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 21

Geben Sie in (a) bis (d) jeweils eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den genannten Eigenschaften an.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ ist divergent.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ist divergent.

Aufgabe 22 (K)

Prüfen Sie die angegebenen Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz, bzw. Divergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(5n)!}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-1)^n(n+4) + (-1)^{n+4}n}$.

Aufgabe 23

Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen sowie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergent.

Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ist absolut konvergent und es gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ für $a, b \in [0, \infty)$ und wenden Sie diese Abschätzung auf die

Partialsomme $\sum_{n=1}^N |a_n b_n|$ für $N \in \mathbb{N}$ an.)

Aufgabe 24 (K)

(a) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ ist konvergent.}$$

(b) Es sei $\alpha \in (0, \infty)$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n := \alpha^n \prod_{j=1}^n \sqrt[j]{j}.$$

Was lässt sich in Abhängigkeit von α über Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ aussagen? Begründen Sie ihre Antwort.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.