KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2011/12
15.12.2011

Analysis I

9. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 22.12.2011, 11.30 Uhr.

Aufgabe 33

Geben Sie ein Beispiel an, für

(a) eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit abzählbar unendlich vielen Unstetigkeitstellen.

(b) eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deren Menge der Unstetigkeitstellen offen und abgeschlossen ist.

(c) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass eine abgeschlossene Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ existiert mit $f(M)$ offen.

(d) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass eine beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ existiert mit $f^{-1}(M)$ nicht beschränkt.

(e) ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to I$ stetig mit $\forall_{x \in I} : \ f(x) \neq x$.

Aufgabe 34 (K)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

(a) $\forall_{M \subseteq \mathbb{R}} : \ M$ offen $\implies$ $f^{-1}(M)$ offen.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv $\implies f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton.

(c) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : \ |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y| \implies f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt $\implies \exists_{x_0 \in \mathbb{R}} : \ f(x_0) = x_0$.

Aufgabe 35

Es sei $D := [-1, 0) \cup (0, 1]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x \log(|x|)$

(a) Zeigen Sie, dass $f : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie eine stetige Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $g|_D = f$.

Aufgabe 36 (K)

Bestimmen Sie jeweils die Menge der Stetigkeitspunkte $S(f)$ der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $f(x) := e^{2x} + 3\cos^4(5x) + 6\sin^7(8x).$

(b) $f(x) := \begin{cases} \frac{2x^3-8x^2}{x^2-16}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\} \\ -4, & x = 4 \\ 4, & x = -4 \end{cases},$

(c) $f(x) := \begin{cases} \frac{a^x-1-x\log(a)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \left(\frac{\log(a^2)}{2\sqrt{2}}\right)^2, & x = 0 \end{cases} \quad (a > 0),$

(d) $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} \end{cases},$

(e) $f(x) := \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x^2}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases},$

(f) $f(x) := \begin{cases} \frac{e^{\sqrt{|x|}}-1-\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}.$