KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2011/12
22.12.2011

Analysis I

10. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 12.01.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 37

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{R}$, die auf D nicht punktweise konvergiert.

(b) $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{R}$, die eine gleichmäßig stetige Grenzfunktion besitzt.

(c) $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{R}$, die auf D gleichmäßig konvergiert, die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ aber nicht auf D gleichmäßig konvergiert.

(d) $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die auf D stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(e) $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, die auf D gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 38 (K)

Untersuchen Sie die Funktionenfolgen in (a) bis (d) auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

(a) Sei $a \in (0,1)$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [a,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := n^{2011}x(1-x)^n$.

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \dfrac{nx^2}{1+n^2x^4}$.

(c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \sqrt[n]{n^{2012}x}$.

(d) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2+x^2)^{2k}}$.

Aufgabe 39 (K)

Untersuchen Sie die Funktionen in (a) bis (d) auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.

(a) $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \dfrac{1}{3x^2+1}$.

(b) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sqrt{x}$.

(c) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := e^x$.

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : [2011, 2012] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sqrt[n]{x}$.

Aufgabe 40

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf D, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 0$.

(b) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf D gegen $f : D \to \mathbb{R}$, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichmäßig auf D, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0.$$

Wir wünschen ein frohes Fest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.