KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2011/12
12.01.2012

Analysis I

11. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 19.01.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 41

Geben Sie ein Beispiel an, für

(a) ein Intervall I und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die Lipschitz-stetig aber nicht differenzierbar ist.

(b) ein Intervall I und eine beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die eine unbeschränkte Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ besitzt.

(c) ein Intervall I und eine unbeschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die eine beschränkte Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ besitzt.

(d) ein Intervall I und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die eine streng monoton fallende und nach unten beschränkte Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ besitzt.

(e) ein Intervall I und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die in einem $x_0 \in I$ nicht differenzierbar ist und dort ein relatives Extremum besitzt.

(f) ein Intervall I und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, die nirgends differenzierbar ist und in überabzählbar vielen $x_0 \in I$ ein relatives Extremum besitzt.

Aufgabe 42 (K)

(a) Zeigen Sie:

(i) Für jedes $x \in (0, \infty)$ existiert ein $y \in (0, x)$ mit: $e^{x^2} = x^2 e^{y^2} + 1$.

(ii) Für jedes $x \in (0, \infty)$ und $y \in (0, x)$ gilt: $\dfrac{x^x}{y^y} < (xe)^{x-y}$.

(b) Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{a^{x^2} - 1}{x}, \qquad (a > 0),$

(ii) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\sinh(x)^2}{\cosh(x)^2 - 1},$

(iii) $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \cos(1 - \cos(x))}{x^2 - x},$

(iv) $\displaystyle \lim_{x \to 1^+} \frac{x^x + \frac{x}{2} - \sqrt{x} - \frac{1}{2}}{\log(x) - x + 1}.$

Aufgabe 43 (K)

Bestimmen Sie alle $x_0 \in I$ in denen die folgenden Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(i) $I := (0, \infty)$ und $f(x) := \dfrac{\log(x)\sinh(x)}{e^x \cosh(x)}$,

(ii) $I := [0, \infty)$ und $f(x) := 2^{3^x} 3^{2^x}$,

(iii) $I := \mathbb{R}$ und $f(x) := \begin{cases} |x|^3, & x \in (-\infty, -1] \\ |x|^5, & x \in (-1, \infty) \end{cases}$,

(iv) $I := \mathbb{R}$ und $f(x) := \begin{cases} \cosh(x), & x \in (-\infty, 0] \\ x^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0, \infty) \end{cases}$.

Aufgabe 44

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(i) Ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist lokal Lipschitz-stetig, d.h. für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $f|_{[a,b]}$ ist Lipschitz-stetig.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

(b) Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion $f : [-1, 8] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^5, & x \in [-1, 1) \\ 2 - (x-2)^2, & x \in [1, 3) \\ 3x - 8, & x \in [3, 4] \\ \frac{12}{x}, & x \in (4, 8] \end{cases}.$$

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.