KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2011/12
INSTITUT FÜR ANALYSIS 19.01.2012
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

Analysis I

12. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 26.01.2012, 11.30 Uhr.

Aufgabe 45 (K)

(a) Es sei $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \cos(x)$.

(i) Zeigen Sie, dass f injektiv ist und $f((0, \pi)) = (-1, 1)$.

(ii) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion $\operatorname{arccos} := f^{-1}$ und berechnen Sie deren Ableitung.

(b) Es sei $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \cosh(x)$.

(i) Zeigen Sie, dass g injektiv ist und $g((0, \infty)) = (1, \infty)$.

(ii) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh} := g^{-1}$ und berechnen Sie deren Ableitung.

(c) Es sei $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) := \coth(x)$ und $\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$.

(i) Zeigen Sie, dass h injektiv ist und $h((0, \infty)) = (1, \infty)$.

(ii) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion $\operatorname{arcoth} := h^{-1}$ und berechnen Sie deren Ableitung.

Aufgabe 46

Geben Sie ein Beispiel an, für

(a) ein $D \subseteq \mathbb{R}$ und ein $f \in C^2(D)$ und $f \notin C^3(D)$.

(b) ein $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, deren Taylorreihe in $x_0 = 0$ für jedes $x \in D$ konvergiert und auf D mit f übereinstimmt.

(c) ein $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, deren Taylorreihe in $x_0 = 0$ für $x = 1$ divergent ist.

(d) ein $D \subseteq \mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, deren Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ abzählbar unendlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

Aufgabe 47

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und berechnen Sie $f^{(n)}(0)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Die Taylorreihe von f in $x_0 = 0$ stimmt in keiner Umgebung der 0 mit f überein.

Aufgabe 48 (K)

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C^n(\mathbb{R})$ sowie $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\forall_{h \in \mathbb{R}}: \; f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + r(h) \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

(b) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ so, dass $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \in \mathbb{R}$ und $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$.

(Hinweis: Führen Sie den Beweis durch Widerspruch.)

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.