

Analysis I

13. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 02.02.2012, 11.30 Uhr.

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt sei in jeder Aufgabe $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Aufgabe 49

Geben Sie ein Beispiel an, für

- (a) eine Funktion $f \in R([a, b])$, die weder monoton noch stetig ist.
- (b) eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f| \in R([a, b])$ und $f \notin R([a, b])$.
- (c) eine Funktion $f \notin C([a, b])$, die eine Stammfunktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.
- (d) eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in R([a, b])$, die punktweise und nicht gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert und $f \in R([a, b])$.
- (e) eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert und $f \notin R([a, b])$.

Aufgabe 50 (K)

(a) Zeigen Sie mittels Ober- und Untersummen die Existenz des Integrals

$$\int_0^1 x^3 \, dx$$

und berechnen Sie dessen Wert.

(b) Berechnen Sie unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung die folgenden Integrale.

(i) $\int_a^b \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} \, dx$ mit $f \in C^1([a, b])$,

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin(x) e^{\cos^2(x)} \, dx$,

(iii) $\int_1^4 \frac{\tanh(\sqrt{x})}{\cosh(\sqrt{x})\sqrt{x}} \, dx$.

Aufgabe 51 (K)

- (a) Zeigen Sie: Für jedes $b \in (0, \infty)$ gilt $1 + \int_0^b \frac{\cosh(x) - 1}{x} dx \leq \cosh(b)$.
- (b) Es sei $f \in R([a, b])$ und $\int_a^b f(x) dx > 0$. Zeigen Sie, dass dann $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ sowie $f(x) > 0$ für $x \in [\alpha, \beta]$.
- (c) Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in R([a, b])$ sowie $g \in R([a, b])$. Zusätzlich konvergiere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und es existiere ein $C \geq 0$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : \int_a^b |f_n(x) - g(x)| dx \leq C.$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \right| \leq C.$$

Aufgabe 52

- (a) Es sei $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0) \\ 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

und $\epsilon > 0$. Bestimmen Sie eine Funktion $f_\epsilon \in C([-1, 1])$ mit

$$\int_{-1}^1 |f(x) - f_\epsilon(x)| dx < \epsilon.$$

- (b) Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und

$$\int_a^b (-f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Zeigen Sie, dass $f \in R([a, b])$.

Hinweis zur Anmeldung für den Analysis I-Schein:

Studierende des Lehramts mit Hauptfach Mathematik und Studienbeginn WS 2010/2011 oder später müssen sich nun doch für den Analysis I-Schein online über das QISPOS anmelden. Gehen Sie dazu auf die Seite studium.kit.edu (Selbstbedienung für Studierende oder Studienportal) und loggen Sie sich ein. Folgen Sie dann unter "Mein Semester" dem Link "Prüfungsan- und Prüfungsabmeldung".

Die Anmeldung ist bis zum 17.02.2011 möglich!

Falls die Scheinkriterien erfüllt wurden, wird der Erwerb des Scheins im Studienportal aufgeführt. Es wird kein Schein in Papierform ausgestellt.