KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

WS 2011/12
02.02.2012

Analysis I

14. Übungsblatt

Abgabe: bis Donnerstag, den 09.02.2012, 11.30 Uhr.

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt sei in jeder Aufgabe $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Aufgabe 53

Geben Sie ein Beispiel an, für

(a) einen zur äquidistanten Zerlegung $Z_n = \left\{x_k := \frac{k}{n} \ : \ k \in \{0, ..., n\}\right\}$ von $[0, 1]$ passenden Riemannschen Zwischenvektor $\xi^n := (\xi_1^n, ..., \xi_n^n)$ mit $\xi_k^n \notin Z_n$ für $k \in \{1, ..., n\}$ und

$$n^2 \max(\{|x_k - \xi_k^n| \ : \ k \in \{1, ..., n\}\}) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

(b) zwei Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit sowohl $M := \{x \in [a, b] \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ als auch $M^c \cap [a, b]$ überabzählbar und $\displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$.

(c) eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ so, dass $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(y) \, \mathrm{d}y$ existiert, aber F keine Stammfunktion von f ist.

(d) eine Funktion $f \notin R([a, b])$ aber $f \in R([a + \epsilon, b])$ für jedes $\epsilon \in (0, b - a)$.

(e) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n \in C^1([a, b])$ und Grenzfunktion $f \notin C^1([a, b])$.

Aufgabe 54 (K)

(a) Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion auf $[0, \infty)$ der folgenden Funktionen.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^3 \cos(x)$,

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \sinh(2x) \sin(4x)$.

(b) Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{4}} \sqrt{\frac{x}{4 - x^{\frac{3}{2}}}} \, \mathrm{d}x$, (ii) $\displaystyle\int_1^8 e^{-\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \tan^4(x)) \, \mathrm{d}x$, (iv) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$.

— bitte wenden —

Aufgabe 55 (K)

(a) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \frac{2nx^2}{(1+n^3x^2)^2}.$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x$.

(b) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ auf $[0,1]$ differenzierbar und für $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$f_n(0) = 0 \quad \text{und} \quad f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+3} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{für } x \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen ein $f \in C^1([0,1])$ konvergiert. Berechnen Sie außerdem eine Stammfunktion von f.

Aufgabe 56

(a) Es sei $f \in C([0,1])$ monoton steigend und $f(x) \geqslant 0$ für $x \in [0,1]$, sowie $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f auf $[0,1]$. Zeigen Sie

$$\int_0^1 \left(\int_0^y f(x)^2\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \leqslant \frac{(F(1)-F(0))^2}{2}.$$

(b) Es sei $f \in C([a,b])$. Zeigen Sie, dass zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion $f_\epsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\int_a^b |f(x) - f_\epsilon(x)|\, \mathrm{d}x < \epsilon.$$

Hinweis: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Funktion $g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$g_n(x) := \begin{cases} \alpha_1, & x \in I_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n, & x \in I_n \end{cases},$$

mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ und Intervallen $I_1, \dots, I_n \subseteq [a,b]$ mit den Eigenschaften

$$I_j \cap I_k = \emptyset \quad (j \neq k) \qquad \textit{und} \qquad \bigcup_{j=1}^{n} I_j = [a,b]$$

nennt man Treppenfunktion.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.