

Analysis I

15. Übungsblatt

Keine Abgabe

Hinweis: Auf diesem Übungsblatt sei, falls vorhanden, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Aufgabe 57

Geben Sie ein Beispiel an, für

- (a) eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f' \notin R([a, b])$.
- (b) eine Funktion $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergent, aber nicht absolut konvergent.
- (c) eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\left(\int_{-\infty}^1 f(x) dx\right)^{-1} = \int_1^\infty f(x) dx = 5$.
- (d) eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_0^\infty f(x) dx$ konvergent und $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ divergent.
- (e) zwei Funktionen $f, g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \neq g$ so, dass $\int_a^\infty f(x) dx$ und $\int_a^\infty g(x) dx$ divergiert, aber $\int_a^\infty (f(x) - g(x)) dx$ konvergiert.
- (f) eine Funktion $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\int_a^\infty f(x) dx$ divergiert und $\frac{1}{n^2} \int_a^n f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.
- (g) eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in R([a, b]) \setminus C([a, b])$ und $f \notin BV([a, b])$.

Aufgabe 58

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz, bzw. Divergenz.

- (i) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx,$
- (ii) $\int_{\pi^2}^\infty \frac{\cos^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx,$
- (iii) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\log(-x)}{x} dx,$
- (iv) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1-x^2} dx,$
- (v) $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^2 x^2} dx,$
- (vi) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{\cosh(x) - \frac{1}{2}}} dx,$
- (vii) $\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx,$
- (viii) $\int_0^\infty e^{-x} x^{2x} dx.$

Aufgabe 59

Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen auf einem Intervall $[a, b]$ ihrer Wahl.

- (i) $\int \frac{x^2}{1-x^4} dx,$ (ii) $\int \frac{3x^2 - 4x + 2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} dx,$
- (iii) $\int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt{x^3}},$ (iv) $\int \frac{\log^4 x - 1}{x(\log^3 x + 1)} dx,$
- (v) $\int \frac{1 + \tan(x)}{\sin(2x)} dx,$ (vi) $\int \frac{1}{\cos(x)} dx.$

Aufgabe 60

(a) Berechnen Sie mit Hilfe von Riemannschen Zwischensummen:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \left(\frac{3nk + 1}{3n^5 k} \right)^{\frac{1}{2}},$ (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (k + n)^{\frac{1}{n}}.$

(b) Untersuchen Sie ob die folgenden Funktionen von beschränkter Variation sind.

- (i) $f : [0, \frac{1}{e}] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \log(x), & x \in (0, e^{-1}] \end{cases},$
- (ii) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right), & x \in (0, 1] \end{cases}.$

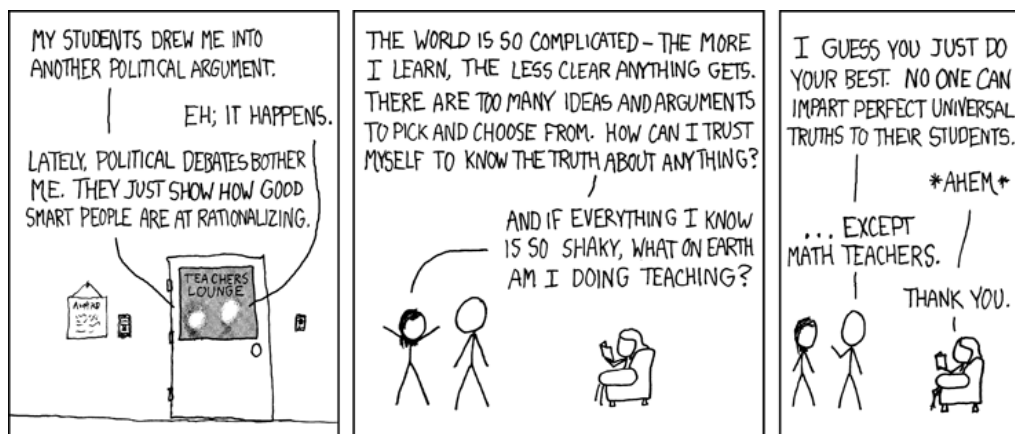
(c) Es seien $f, g \in BV([a, b])$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $|f| \in BV([a, b]), \alpha f + \beta g \in BV([a, b])$ und $f \cdot g \in BV([a, b]).$

Hinweis: Auf der Seite

<http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/ana12011w/>

finden Sie ein Merkblatt zum Thema Partialbruchzerlegung.

Wir wünschen erholsame Semesterferien!



Quelle: <http://xkcd.com/263/>