# Rationale Funktionen

*Definition:* Es seien $p, q$ reelle Polynome mit $q$ nicht die Nullfunktion und $M := \{x \in \mathbb{R} \ : \ q(x) = 0\}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \setminus M \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ heißt **rationale Funktion**. Gilt $\mathrm{Grad}(p) < \mathrm{Grad}(q)$ so heißt $f$ **echt gebrochen rationale Funktion**.

*Wichtig:*

(a) Jede rationale Funktion $f = \dfrac{p}{q}$ wie oben, lässt sich schreiben als $f = p_1 + \dfrac{p_2}{q}$ mit reellen Polynomen $p_1, p_2$ und $\mathrm{Grad}(p_2) < \mathrm{Grad}(q)$.

(b) Jedes Polynom $q(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, besitzt eine Darstellung der Form

$$(Q) \quad q(x) = a_n (x - x_1)^{\rho_1} \cdots (x - x_r)^{\rho_r} \cdot (x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1} \cdots (x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s}.$$

Dabei sind $\rho_1, \dots, \rho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s \in \mathbb{N}$, und es ist

$$\rho_1 + \cdots + \rho_r + 2\sigma_1 + \cdots + 2\sigma_s = n.$$

Die $x_1, \dots, x_r$ sind die reellen Nullstellen von $q$, die Polynome $x^2 + A_j x + B_j$ besitzen keine reellen Nullstellen.

### Partialbruchzerlegung echt gebrochen rationaler Funktionen

Es sei $f = \frac{p}{q}$ eine echt gebrochene rationale Funktion. Das Nennerpolynom $q$ habe die Darstellung $(Q)$. Dann besitzt $f$ eine Summendarstellung der Form

$$\begin{aligned}
f(x) = & \frac{a_{11}}{x - x_1} + \frac{a_{12}}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1\rho_1}}{(x - x_1)^{\rho_1}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{a_{r1}}{x - x_r} + \frac{a_{r2}}{(x - x_r)^2} + \cdots + \frac{a_{r\rho_r}}{(x - x_r)^{\rho_r}} \\
& + \frac{\alpha_{11} x + \beta_{11}}{x^2 + A_1 x + B_1} + \frac{\alpha_{12} x + \beta_{12}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{1\sigma_1} x + \beta_{1\sigma_1}}{(x^2 + A_1 x + B_1)^{\sigma_1}} \\
& + \cdots \\
& + \frac{\alpha_{s1} x + \beta_{s1}}{x^2 + A_s x + B_s} + \frac{\alpha_{s2} x + \beta_{s2}}{(x^2 + A_s x + B_s)^2} + \cdots + \frac{\alpha_{s\sigma_s} x + \beta_{s\sigma_s}}{(x^2 + A_s x + B_s)^{\sigma_s}},
\end{aligned}$$

wobei die $a_{jk}$, $\alpha_{\nu\mu}$ und $\beta_{\nu\mu}$ reelle Zahlen sind.