Lösungsvorschläge zum 1. Analysis I-Test.

Aufgabe 1

Voraussetzung: Es sei $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ die mathematische Aussage $A(n)$ definiert durch

$$\sum_{k=0}^{n} s^k = \frac{1 - s^{n+1}}{1 - s}.$$

Behauptung: $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:
(IA) $A(0)$ ist wahr, denn $\sum_{k=0}^{0} s^k = s^0 = 1 = \frac{1-s}{1-s}$.
(IS) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ wahr (IV). Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} s^k = \sum_{k=0}^{n} s^k + s^{n+1} \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{1 - s^{n+1}}{1 - s} + s^{n+1}\frac{1-s}{1-s} = \frac{1 - s^{n+1} + s^{n+1} - s^{n+2}}{1 - s} = \frac{1 - s^{n+2}}{1 - s}.$$

□

Aufgabe 2

Voraussetzung: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{2n+4}.$$

Behauptung: $H(a_n) = \{-e^2, e^2\}$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -e^2$ sowie $\limsup_{n\to\infty} a_n = e^2$.

Beweis: Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{2n+4}.$$

Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^2.$$

Somit folgt für $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{2k} = (-1)^{2k} b_{2k} = b_{2k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} e^2 \qquad \text{und} \qquad a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} b_{2k-1} = -b_{2k-1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} -e^2.$$

Nach Aufgabe 15 gilt, wegen $\mathbb{N} = \{2k \ : \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \ : \ k \in \mathbb{N}\}$ nun $H(a_n) = \{-e^2, e^2\}$. Insbesondere ist $\liminf_{n\to\infty} a_n = \min(H(a_n)) = -e^2$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max(H(a_n)) = e^2$, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. □

Aufgabe 3

(a) *Voraussetzung:* Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n.$$

Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

1.Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n} = \frac{3n+2}{2n} = \frac{3}{2} + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$

Also gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3}{2} > 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. □

2. Beweis Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = \left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{n}\right)^n > \left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{3}{2}.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und daher $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent (alternativ tut es natürlich auch das Minorantenkriterium). □

(b) *Voraussetzung:* Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$b_n := \frac{(2n)!}{(3n)!}.$$

Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist konvergent.

Beweis: Definiere $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $\beta_n := \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq \beta_n &= \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{\frac{(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{(2n)!}{(3n)!}}\right| = \frac{(2n+2)!(3n)!}{(3n+3)!(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(2n+1)}{(3n+2)(3n+1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2n+1}{9n^2+9n+2} \\ &= \frac{2n}{3n^2} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{9+\frac{9}{n}+\frac{2}{n}} \leq \frac{2}{3n} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{9n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Nach dem Schachtelprinzip konvergiert nun $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Daher gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert nun $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. □