Lösungsvorschläge zum 2. Test.

Aufgabe 1

(a) *Voraussetzung:* Es seien $g : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ und $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \frac{4 + x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \quad \text{und} \quad h(x) := (2x)^{\log(x)}.$$

Behauptung 1: Für $x \in (-2, 2)$ gilt

$$g'(x) = \frac{12x - x^3}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Beweis: Mit der Quotienten- und der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x\sqrt{4 - x^2} - (4 + x^2)(-2x)\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}}{4 - x^2} \\ &= \frac{2x(4 - x^2) + x(4 + x^2)}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{12x - x^3}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

□

Behauptung 2: Für $x \in (0, \infty)$ gilt

$$h'(x) = \frac{1}{x}(\log(x) + \log(2x))(2x)^{\log(x)}.$$

Beweis: Für $x \in (0, \infty)$ gilt

$$h(x) = e^{\log(x)\log(2x)}.$$

Die Ableitung der Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \log(x)\log(2x)$ ist unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel gegeben durch

$$f'(x) = \frac{\log(2x)}{x} + \frac{2\log(x)}{2x} = \frac{1}{x}(\log(x) + \log(2x)).$$

Dann folgt mit der Kettenregel für $x \in (0, \infty)$, dass

$$h'(x) = (\exp \circ f)'(x) = \exp(f(x))f'(x) = \frac{1}{x}(\log(x) + \log(2x))(2x)^{\log(x)}.$$

□

Voraussetzung: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sinh(x)}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0. \end{cases}.$$

Behauptung (a): $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Beweis: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt, da $e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$ für $y \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sinh(x)}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{1}{2x}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^k\right)\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Es gilt für $k \in \mathbb{N}_0$, dass

$$0 < \sqrt[k+1]{\frac{1}{|(2k+3)!|}} < \frac{1}{\sqrt[k+1]{k+1}} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Also hat die letzte Potenzreihe Konvergenzradius $r = \infty$. Insbesondere ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^{2k}}{(2k+1)!} = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^{2k}}{(2k+1)!}}_{=0} = 1.$$

Damit gilt für *jedes* $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Die Funktion f ist also durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ definiert, welche den Konvergenzradius $r = \infty$ besitzt. Nach Satz 22.1 ist daher $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. □

Behauptung (b): Es gilt:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0}: \ f^{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Beweis: Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{(n+1)!}, & \exists_{k\in\mathbb{N}_0}: \ n = 2k, \\ 0, & \exists_{k\in\mathbb{N}_0}: \ n = 2k+1, \end{cases}$$

und erhalten

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-0)^n.$$

Aus Satz 22.1 folgt nun

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0}: \ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

also

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_0}: \ f^{(n)}(0) = a_n n! = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & n \text{ gerade}, \\ 0, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

□

Aufgabe 3

(a) *Behauptung:* Für $\epsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \tan(x)\ \mathrm{d}x = \log(2).$$

Beweis: Für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gilt

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ sowie } \cos(x) > 0$$

und die Funktion $x \mapsto \tan(x)$ ist auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ stetig und daher auf jedem beschränkten, abgeschlossenen Teilintervall von $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ Riemann-integrierbar. Außerdem ist eine Stammfunktion auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ von $x \mapsto \tan(x)$ gegeben durch $x \mapsto -\log(\cos(x))$, denn

$$(-\log \circ \cos)'(x) = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Sei nun $\epsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Der 1. Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung liefert

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \tan(x)\ \mathrm{d}x &= -\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right)\right) + \log\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \epsilon\right)\right) \\
&= -\log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right)\right) + \log\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)\right) = \log\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Auf $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sind die Funktionen $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right)$ und $x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)$ stetig differenzierbar und besitzen keine Nullstellen. Die Regel von de l'Hospital liefert

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right)} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)}{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right)} = 2.$$

Wegen der Stetigkeit von $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ folgt

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \tan(x)\ \mathrm{d}x = \log(2).$$

□

(b) *Behauptung:* $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(y) := -2\cos(\sqrt{y})\sqrt{y} + 2\sin(\sqrt{y})$ ist eine Stammfunktion von $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sin(\sqrt{x})$.

Beweis: Es sei $y \in (0, \infty)$ sowie $a \in (0, y)$. Die Abbildung f ist auf $(0, \infty)$ als Komposition stetiger Funktionen stetig und daher auf jedem beschränkten, abgeschlossenen Teilintervall von $(0, \infty)$ Riemann-integrierbar. Es gilt für $y \in (0, \infty)$ und $a \in (0, y)$:

$$\begin{aligned}
F(y) &:= \int_a^y \sin(\sqrt{x})\ \mathrm{d}x = \int_a^y \sqrt{x} \cdot \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x \\
&\overset{PI}{=} \left[-2\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}\right]_a^y + \int_a^y \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})\ \mathrm{d}x \\
&= \left[-2\cos(\sqrt{x})\sqrt{x}\right]_a^y + \left[2\sin(\sqrt{x})\right]_a^y \\
&= -2\cos(\sqrt{y})\sqrt{y} + 2\sin(\sqrt{y}) + \underbrace{\left(2\cos(\sqrt{a})\sqrt{a} - 2\sin(\sqrt{a})\right)}_{=:c}.
\end{aligned}$$

Nach dem 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $F(y) := -2\cos(\sqrt{y})\sqrt{y} + 2\sin(\sqrt{y})$ eine Stammfunktion von f auf $(0, \infty)$. □