KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2012
INSTITUT FÜR ANALYSIS 27.04.2012
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

Analysis II

2. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, den 04.05.2012, 11.00 Uhr.

Aufgabe 5

Es seien immer $m, n \in \mathbb{N}$ und $m, n \geqslant 2$. Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in x^0 aber nicht partiell differenzierbar in x^0,

(b) $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x^0 \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar in x^0 aber nicht stetig in x^0,

(c) $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\forall_{x \in D} : \ \|(\text{grad } f)(x)\| \geqslant 1$,

(d) $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar mit $J_f(x)$ symmetrisch und nicht invertierbar für jedes $x \in D$,

(e) $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $g : D \to \mathbb{R}$ und $x^0 \in D$ so, dass $(\text{grad } g)(x^0)^T \neq 0$ im Kern von $J_f(x^0)$ liegt,

(f) $\emptyset \neq D \subsetneqq \mathbb{R}^n$ offen und $A \subseteq D$ abgeschlossen in D aber nicht abgeschlossen,

(g) $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C(D, \mathbb{R}^m)$ und eine offene Menge $O \subseteq D$ mit $f(O)$ nicht offen sowie $A \subseteq D$ abgeschlossen in D mit $g(A)$ nicht abgeschlossen,

(h) $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt mit $f^{-1}(K)$ nicht kompakt.

Aufgabe 6 (K)

Es sei $m \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie jeweils die angegebene Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ in $0 \in D$ auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit. Berechnen Sie in diesem Punkt gegebenenfalls den Gradienten, bzw. die Jacobimatrix.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x) := \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right), |x|^{x^2}\right), & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (0, 1), & x = 0. \end{cases}$

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) := \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{(1-\cos(xy))\sin(x+z)}{x^3}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x \neq 0, \\ \frac{z}{2}, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 7 (K)

(a) Es seien $k, l, m \in \mathbb{N}$, $g \in C(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$ und $T \in \mathbb{R}^{l \times k}$. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \|g(Tx)\|$ stetig ist.

(b) Es sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $f \in C(D, \mathbb{R}^m)$,

(ii) $O \subseteq \mathbb{R}^m$ offen impliziert $f^{-1}(O)$ offen in D,

(iii) $A \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen impliziert $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in D.

Hinweis: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Menge $M \subseteq D$ heißt offen (abgeschlossen) in D, wenn ein $\tilde{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (abgeschlossen) mit $M = D \cap \tilde{M}$ existiert.

(c) Es seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ offen und $D := D_1 \times D_2$ sowie $f : D \to \mathbb{R}$ auf D partiell differenzierbar. Zusätzlich seien die partiellen Ableitungen $f_x, f_y : D \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass $f \in C(D, \mathbb{R})$.

Aufgabe 8

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sowie $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in $x^0 \in D$. Zeigen Sie, dass $h : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) := f(x) \cdot g(x)$ in x^0 partiell differenzierbar ist und

$$J_h(x^0) = g(x^0)^T J_f(x^0) + f(x^0)^T J_g(x^0).$$

(b) Es seien $m, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $D_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $D_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ offen sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es sind außerdem $f : D_1 \to \mathbb{R}^m$ und $g : D_2 \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar in $x^0 \in D_1$ bzw. $y^0 \in D_2$. Zeigen Sie, dass $h : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $h(x, y) := \alpha f(x) + \beta g(y)$ partiell differenzierbar in (x^0, y^0) ist und

$$J_h(x^0, y^0) = \big(\alpha \cdot J_f(x^0) \mid \beta \cdot J_g(y^0)\big) \in \mathbb{R}^{m \times (n_1 + n_2)}.$$

Hinweis

Die Dienstagsvorlesung findet ab dem 8.Mai im Daimler-Hörsaal statt.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.