Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

Analysis II

3. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, den 11.05.2012, 11.00 Uhr.

Aufgabe 9

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geqslant 2$. Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ welches auf

$$A_n := \Big\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \prod_{j=1}^{n} x_j = 0\Big\}$$

nicht partiell differenzierbar und auf $\mathbb{R}^n \setminus A_n$ differenzierbar ist,

(b) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\forall_{x^0 \in D}$: $(\operatorname{grad} f)(x^0) = (\operatorname{grad} f_{x_j})(x^0) \neq 0$ für jedes $j \in \{1, ..., n\}$,

(c) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ und $x^0 \in D$, sodass $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^0)$ für $i \in \{1, ..., n\}$ nicht existiert und $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0)$ für $i \neq j$ existiert,

(d) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar auf D aber nicht stetig partiell differenzierbar auf D,

(e) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D aber nicht stetig partiell differenzierbar auf D.

Aufgabe 10 (K)

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2 z}{x^4 + y^4 + z^4} & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}, \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $x^0 \in \mathbb{R}^3$ für die f partiell differenzierbar bzw. differenzierbar ist.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für jedes $x^0 \in \mathbb{R}^2$ und zeigen Sie $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Aufgabe 11

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geqslant 3$ sowie $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \|x\|^{2-n}$. Zeigen Sie:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} : \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) = 0.$$

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(t,x) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$. Zeigen Sie, dass

$$\forall_{(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n} : \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t,x).$$

Aufgabe 12 (K)

(a) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^T M x$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $(\text{grad } f)(x^0)$ für jedes $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Verzichten Sie in ihrem Vorgehen auf die direkte Berechnung der partiellen Ableitungen von f.

(b) Es sei $m, n \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sowie $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$. Zeigen Sie, dass f genau dann in $x^0 \in D$ differenzierbar ist, wenn $f_j : D \to \mathbb{R}$ für jedes $j \in \{1, ..., m\}$ in x^0 differenzierbar ist.

Hinweis

Die Dienstagsvorlesung findet ab dem 8.Mai im Daimler-Hörsaal statt.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.