KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2012
INSTITUT FÜR ANALYSIS 11.05.2012
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

Analysis II

4. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, den 18.05.2012, 11.00 Uhr.

Aufgabe 13

Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Geben Sie ein Beispiel an für

(a) ein Gebiet $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ welches nicht konvex ist,

(b) eine konvexe Menge $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ welche kein Gebiet ist,

(c) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in D$, einen Richtungsvektor $a \in \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial f}{\partial a}(x) \neq (\operatorname{grad} f)(x) \cdot a$,

(d) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\frac{\partial f}{\partial a}(x)$ existiert für jeden Richtungsvektor $a \in \mathbb{R}^n$ aber f ist in x nicht differenzierbar,

(e) $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht konvex und $f : D \to \mathbb{R}$ nicht differenzierbar auf D und Lipschitzstetig auf D.

Aufgabe 14 (K)

(a) Es seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y) := 1 + xy, \; g(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 + z^2 \\ 4yz \end{pmatrix}, \; h(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2x^3y^2 \\ y^2 z \\ xyz^4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $f'(x_0)$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^2$ und $g'(x_0), h'(x_0), (f \circ g)'(x_0), (g \circ h)'(x_0)$ sowie $(f \circ g \circ h)'(x_0)$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

(b) Es seien $k, m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{m_1}$, $h : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$ sowie $f : \mathbb{R}^{m_1+m_2} \to \mathbb{R}^k$ jeweils differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen. Zeigen Sie, dass $p : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^k$ definiert durch

$$p(x,y) := f(g(x), h(y))$$

auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ differenzierbar ist und drücken Sie die Ableitung von p durch die Ableitungen von f, g und h aus.

Aufgabe 15

Es sei $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$K(r,\varphi,\theta) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix von K für jedes $(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie alle $(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3$ für die $J_K(r,\varphi,\theta)$ invertierbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ nicht injektiv ist und bestimmen Sie $D \subseteq \mathbb{R}^3$ so, dass $K : D \to \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x,y,z > 0\}$ bijektiv ist.

Aufgabe 16 (K)

(a) Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sowie $f : D \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar auf D. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist auf } D \text{ Lipschitzstetig} \implies J_f \text{ ist auf } D \text{ beschränkt.}$$

(b) Untersuchen Sie jeweils die angegebene Funktion f auf Existenz der Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial a}(0)$ für jeden Richtungsvektor a und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x^4yz + x^2y^2z^2 - xyz^4 - 4x + 4z$.

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sin(\|(x,y)\|), & (x,y) \in M, \\ \cos(\|(x,y)\|), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M, \end{cases}$$

wobei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > x > 0\}$.

Hinweis zu (a): J_f heißt beschränkt auf D, wenn ein $C \geqslant 0$ existiert mit $\forall_{x \in D} : \ \|J_f(x)\| \leqslant C$.

Bitte schreiben Sie auf Ihre Abgabe Ihren Namen, Matrikelnummer, den Namen des Tutors und die Nummer des Tutoriums. Falls Sie mehrere Blätter abgeben, tackern Sie Diese bitte zusammen.