KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) SS 2012
INSTITUT FÜR ANALYSIS 06.07.2012
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Andreas Bolleyer

Analysis II

12. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, den 13.07.2012, 11:00 Uhr.

Aufgabe 45

Geben Sie ein Beispiel an für

(a) $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ welches auf D einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl y, aber keiner Lipschitzbedingung auf D bzgl. y genügt,

(b) ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ welches unendlich viele Lösungen besitzt,

(c) ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y),\ y(0) = y_0$ mit maximalem Existenzintervall $(-1, 1)$,

(d) ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ welches auf $[x_0, \infty)$ eine nicht konstante, eindeutige Lösung besitzt und $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$,

Aufgabe 46 (K)

(a) Es sei $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u' &= -u(u-1)(u-2) - v, && u(0) = u_0, \\ v' &= u - v, && v(0) = v_0, \end{aligned}$$

eine eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung $((u, v), J)$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie explizit die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung $((u, v), J)$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u' &= -xu + 2x(x-1)v, && u(0) = 0, \\ v' &= v^2, && v(0) = 1. \end{aligned}$$

Hinweis: Das Anfangswertproblem in (a) ist ein Modell für die Wellenausbreitung in Nervenzellen und ist unter dem Namen FitzHugh-Nagumo-Modell bekannt.

Aufgabe 47 (K)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u' &= 2u - 3v, && u(0) = 1, \\ v' &= u - 2v, && v(0) = 1, \end{aligned}$$

eine eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung $((u, v), J)$ mit $J = \mathbb{R}$ besitzt und berechnen Sie diese unter Verwendung der Picard-Iteration aus Satz 21.3.

Aufgabe 48

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y. Ferner sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und (y, J) die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x,y), \qquad y(0) = y_0,$$

mit maximalem Existenzintervall J.

(a) Es sei $x \in [0,\infty)$ mit $[0,x] \subseteq J$. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $[0, x+\delta] \subseteq J$.

(b) Zeigen Sie, dass $J = [0,\infty)$ genau dann gilt, wenn für jedes beschränkte Intervall $I \subseteq J$ die Bedingung $\sup\limits_{x \in I} \|y(x)\|_2 < \infty$ erfüllt ist.

Hinweis zu

(a) Konstruieren Sie eine Fortsetzung der Lösung y über das Intervall $[0,x]$ hinweg. Die Aussage in (a) besagt, dass das maximale Existenzintervall J immer offen in $[0,\infty)$ ist.

(b) Konstruieren Sie bei "$\Longleftarrow$" unter der Annahme, dass $J = [0,x)$ mit $x \in (0,\infty)$ eine Fortsetzung der Lösung über J hinweg. Die Aussage in (b) besagt, dass $J = [0,\infty)$ genau dann gilt, wenn die Lösung y auf beschränkten Intervallen beschränkt ist.

O-Phase 2012 - Tutoren gesucht!

In der Woche vor Vorlesungsbeginn, vom 8. bis zum 12. Oktober, findet die O-Phase für die neuen Studierenden im Wintersemester 2012/13 statt. Wie immer werden dafür Tutoren gesucht, die den neuen Erstis den Spaß am Studieren vermitteln! Weitere Informationen findet man unter

`http://tutor.o-phase.com`.