Probeklausur Analysis II

Aufgabe 1

(a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_m$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ offen ist.
(2 Punkte)

(b) Geben Sie (ohne Begründung) ein Beispiel für eine Familie $\{A_i \subseteq \mathbb{R} \text{ offen} \quad : \quad i \in \mathbb{N}\}$ an, sodass $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ nicht offen ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ für jede Richtung $a \in \mathbb{R}^2$ mit $\|a\|_2 = 1$.
(1,5 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist. (1,5 Punkte)

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = x + y + z$ und $S := \partial U_2((0,0,0))$. Bestimmen Sie $\min(f(S))$ und $\max(f(S))$.

Aufgabe 4
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x))\sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix} .$$

(a) Untersuchen Sie in jedem $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ob eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von (x,y) existiert, sodass $f|_U$ injektiv ist. (2 Punkte)

(b) Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv bzw. surjektiv? Begründen Sie ihre Antwort. (1 Punkt)

Aufgabe 5
Es sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = Ay$. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$
(1 Punkt)