Satz von Picard-Lindelöf – Vorbereitung

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$. Für $z \in D$ schreibe $z = (x, v)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^n$.

Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ *genügt (auf D) einer Lipschitz-Bedingung bzgl. v*, wenn

$$\exists L > 0\ \forall (x, v), (x, \tilde{v}) \in D : \quad \|f(x, v) - f(x, \tilde{v})\| \leq L\|v - \tilde{v}\|.$$

Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ *genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. v*, wenn

$$\begin{aligned} &\forall (x_0, v_0) \in D\ \exists r > 0 \\ &\qquad \exists L > 0\ \forall (x, v), (x, \tilde{v}) \in U : \quad \|f(x, v) - f(x, \tilde{v})\| \leq L\|v - \tilde{v}\|, \end{aligned}$$

wobei $U := D \cap U_r(x_0, v_0)$.

Satz von Picard-Lindelöf (Version III, lokale Version)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ *offen und* $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ *erfülle eine lokale Lipschitz-Bedingung bzgl.* v.
Dann besitzt für alle $(x_0, y_0) \in D$ *das AWP*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine Lösung.

Genauer gibt es für jedes Paar $(x_0, y_0) \in D$ *ein offenes Intervall* $J \subseteq \mathbb{R}$ *mit* $x_0 \in J$ *und ein Lösung* $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *des AWP derart, dass für alle Lösungen* $y_{\mathrm{a}} \in C^1(J_{\mathrm{a}}, \mathbb{R}^n)$ *des AWP gilt*

$$J_{\mathrm{a}} \subseteq J \quad \text{und} \quad \forall x \in J_{\mathrm{a}} : \; y_{\mathrm{a}}(x) = y(x).$$

Die Lösung y *ist nicht fortsetzbar.* (Satz 21.6)

Hinreichend für lokale Lipschitz-Bedingung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{1+n}$ offen. Schreibe wieder $z = (x, v)$ für $z \in D$.

Satz 21.7: *Sei $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$. Für alle $j, k \in \{1, \ldots n\}$ existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial v_j} f_k$ in jedem Punkt von D und $\frac{\partial}{\partial v_j} f_k : D \to \mathbb{R}$ sei stetig.*
Dann erfüllt f eine lokale Lipschitz-Bedingung bezüglich v.

Die Voraussetzungen von Satz 21.7 sind erfüllt, wenn f stetig partiell differenzierbar ist. D.h.

$$f \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ erfüllt lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. } v.$$

Satz von Picard-Lindelöf (Version I, globale Version)

Seien $a < b$*,* $I = [a, b]$*,* $D = I \times \mathbb{R}^n$ *und* $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$*. Weiter erfülle* f *eine globale Lipschitz-Bedingung bzgl.* v*.*
Dann besitzt für alle $(x_0, y_0) \in D$ *das AWP*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$*.*

Natürlich ist y dann auch nicht fortsetzbar.