Wdh. Folgen und Reihen

Sei (a_k) Folge in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$.

(a_k) konvergiert gegen a, wenn $|a_k - a| \to 0$ für $k \to \infty$.

Wegen $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$ und andererseits $|z| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\}$:

$$|a_k - a| \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |\operatorname{Re} a_k - \operatorname{Re} a| \to 0 \text{ und } |\operatorname{Im} a_k - \operatorname{Im} a| \to 0$$

(a_k) heißt Cauchyfolge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \; \forall k, l \in \mathbb{N} : \quad k, l \geq k_0 \implies |a_k - a_l| \leq \varepsilon.$$

Der Vektorraum $\mathbb{C}$ mit der Norm $|\,.\,|$ ist vollständig: Jede Cauchyfolge (a_k) konvergiert.

Wdh. Folgen und Reihen

Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist Folge $(S_N)_N$ der Partialsummen $S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv abs., wenn die reele Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konv.

Methoden Konv./Diverg. nachzuweisen

- notw. Bed.: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. $\implies$ (a_k) ist Nullfolge.
- Konv. der Partialsummen S_N direkt nachweisen.
- Cauchykrit.
- Minoranten-/Majorantenkrit.
- Quotientenkrit. und Wurzelkrit.

Monotoniekrit. und Leibnizkrit. verwenden Ordnung $\leq$ $\rightsquigarrow$ nur für reelle Reihen anwendbar.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.} \quad \iff \quad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_k \text{ konv.} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_k \text{ konv.}$$

Wdh. Folgen und Reihen

Seien (a_k) Folge in $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ fest und $z \in \mathbb{C}$.

Potenzreihen $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ sind spezielle Reihen (Multiplikation in $\mathbb{C}$).

Konvergenzradius $r := \left(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\right)^{-1} \in [0,\infty]$ (übliche Interpret.)

Wenn $r \in (0,\infty)$ gilt wie bisher:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \text{ konv. abs., wenn } |z-z_0| < r,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \text{ diverg., wenn } |z-z_0| > r.$$

Die Punkte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| = r$ müssen gesondert betrachtet werden.

Aufgabe: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^5} z^k$.

Lösung: Bestimme Konv.-Radius r:

$$\sqrt[k]{\frac{5^k}{k^5}} = 5\frac{1}{(\sqrt[k]{k})^5} \to 5 \text{ für } k \to \infty. \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{5^k}{k^5}}} = \frac{1}{5}$$

Potenzreihe konv. abs. für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{5}$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{5}$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{5}$ gilt

$$\left|\frac{5^k}{k^5} z^k\right| = \frac{5^k}{k^5}|z|^k = \frac{5^k}{k^5}\frac{1}{5^k} = \frac{1}{k^5}$$

Majorantenkrit: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5}$ konv. $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^5} z^k$ konv. abs. für $|z| = \frac{1}{5}$.

Insgesamt: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k^5} z^k$ konv. abs. falls $|z| \leq \frac{1}{5}$
und divergiert falls $|z| > \frac{1}{5}$.

Aufgabe: Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2+(-1)^k)^k} z^k$.

Lösung: Bestimme Konv.-Radius r: Setze $a_k := \dfrac{1}{(2+(-1)^k)^k}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2+(-1)^k} \to \begin{cases} \frac{1}{3}, & k \text{ gerade} \\ 1, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also ist $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ und somit $r = \frac{1}{1} = 1$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist

$$\left| \frac{1}{(2+(-1)^k)^k} z^k \right| = \frac{1}{(2+(-1)^k)^k} = \begin{cases} \frac{1}{3^k}, & k \text{ gerade} \\ 1, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$
$$\not\to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Insgesamt: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2+(-1)^k)^k} z^k$ konv. abs. falls $|z| < 1$
und divergiert falls $|z| \geq 1$.

Aufgabe: (a) Zeige: Konv.-Radius von $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k(k+1)}{k^2} z^{2k}$ ist $r = \frac{1}{2}$.

(b) Finde je ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = r$ so, dass die Reihe konv. bzw. diverg.

Lösung:. (a) Ansatz Wurzelkrit.: Mit dem Einschließungskrit folgt leicht

$$\sqrt[k]{\left|\frac{4^k(k+1)}{k^2} z^{2k}\right|} = 4|z|^2 \sqrt[k]{\frac{k+1}{k^2}} \to 4|z|^2 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Es folgt

$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{4^k(k+1)}{k^2} z^{2k} \text{ konv. abs. für } 4|z|^2 < 1 \;\text{ bzw. }\; |z| < \tfrac{1}{2}$$
$$\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{4^k(k+1)}{k^2} z^{2k} \text{ diverg. für } 4|z|^2 > 1 \;\text{ bzw. }\; |z| > \tfrac{1}{2}$$

Das zeigt die Behauptung (a).

Aufgabe: (b) Finde je ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{2}$ so, dass $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k(k+1)}{k^2} z^{2k}$ konv. bzw. diverg.

Lösung:. (b) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{2}$ gilt (wegen $1 \geq 0$)

$$\left|\frac{4^k(k+1)}{k^2} z^{2k}\right| = \frac{k+1}{k^2} \geq= \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

Nach Minorantenkrit. konv. die Potenzreihe nicht abs. falls $|z| = \frac{1}{2}$. Insbesondere diverg. die Potenzreihe für $z = \frac{1}{2}$.

Für $z = \pm\frac{\mathrm{i}}{2}$ gilt $|z| = \frac{1}{2}$ und $\left(\pm\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 = (\pm 1)^2 \frac{1}{4}\mathrm{i}^2 = \frac{1}{4}(-1)$, also

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{4^k(k+1)}{k^2}(z^2)^k &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{4^k(k+1)}{k^2}(-1)^k \frac{1}{4^k} \\ &= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)}{k^2}\end{aligned}$$

Da $(\frac{(k+1)}{k^2})$ fallende Nullfolge ist, folgt mit dem Leibnizkrit. dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k(k+1)}{k^2}(\pm\frac{\mathrm{i}}{2})^{2k}$ bedingt konv.