KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 27.04.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

1. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS 17
Abgabe bis 04.05.2017, 12:00

Aufgabe 1 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\| < \infty$. Außerdem sei $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, die Folge der Partialsummen, definiert durch

$$S^{(m)} := \sum_{k=1}^{m} x^{(k)}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie weiter dass für den Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)} := \lim_{m\to\infty} S^{(m)}$ gilt

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}\Big\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\|.$$

Aufgabe 2 (K) (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

abgeschlossen ist.
Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ jeweils auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

(b) $B := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \|(a, b)\| < 42\}$

(c) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 100 \text{ und } x \leq 2\}$

(d) $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < 1 \text{ und } x > 0\}$

Aufgabe 3 (K) (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge von paarweise orthogonalen Vektoren, d.h. $x_j \cdot x_k = 0$ für alle $j, k \in \{1, \dots, m\}$ mit $j \neq k$. Zeigen Sie:

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^2$$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Aufgabe 4 Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist A offen, so ist $A + B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists a \in A, b \in B : x = a + b\}$ offen.

(b) Ist A abgeschlossen und B kompakt, dann ist $A + B$ abgeschlossen.

(c) Sind A und B kompakt, so ist $A + B$ kompakt.

Information

Alle Informationen bezüglich der Themen **Übungsbetrieb, Scheinkriterien, Tutorien, Prüfung, Skript** und **Literaturhinweise** finden Sie auf unserer Webseite

`http://www.math.kit.edu/iana3/lehre/ana22017s/`

Dort sind auch die Termine zum **Lernraum Mathematik** aufgelistet.