KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 29.06.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

10. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17

Abgabe bis 06.07.2017, 12:00

Aufgabe 37 Sei X ein Vektorraum. Zwei Normen $\|\,.\,\|$ und $|||\,.\,|||$ auf X heißen *äquivalent*, wenn

$$\exists c_1, c_2 > 0\ \forall x \in X: \quad c_1\|x\| \leq |||x||| \leq c_2\|x\|.$$

Bemerkung: In diesem Fall sind in $(X, \|\,.\,\|)$ und in $(X, |||\,.\,|||)$ genau die gleichen Folgen konvergent bzw. Cauchyfolgen und genau die gleichen Mengen offen bzw. abgeschlossen.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

Hinweis: Vergleichen Sie zunächst eine beliebige Norm $|||\,.\,|||$ auf $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $\|\,.\,\|_2$. Es lässt sich zeigen, dass $|||x||| \leq M\|x\|_2$, wobei $M := (\sum_{j=1}^n |||e_j|||^2)^{1/2}$ mit den Einheitsvektoren $e_j \in \mathbb{R}^n$. Auf der anderen Seite gilt $|||x||| \geq m\|x\|_2$, wobei $m := \min\{|||v||| \mid v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_2 = 1\}$.

Aufgabe 38 (K) (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ definiere

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{C^1([a,b],\mathbb{R})} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Zeigen Sie, dass $\|\,.\,\|_{C^1}$ eine Norm ist und $(C^1([a,b],\mathbb{R}), \|\,.\,\|_{C^1})$ ein Banachraum.

(b) Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_{\max} = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Bestimmen Sie Zahlen $c_1, c_2 > 0$ mit $c_1\|x\|_2 \leq \|x\|_{\max} \leq c_2\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Hierbei ist $\|\,.\,\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 39 (K) (a) Geben Sie je ein Beispiel an für ein $M \subseteq [0,1]$ und eine Funktion $F: M \to M$ mit $|F(a) - F(b)| \leq |a - b|$ für alle $a, b \in M$ die ...

(i) ... keinen Fixpunkt besitzt, wobei M kompakt ist.

(ii) ... unendlich viele Fixpunkte hat, wobei M ein kompaktes Intervall ist.

(iii) ... genau einen Fixpunkt $x_* \in M$ besitzt, für welche aber die durch $x_{k+1} = F(x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ gegebene rekursive Folge nur konvergiert, wenn $x_0 = x_*$.

(iv) Geben Sie auch eine Beispiel an für eine nicht abgeschlossene Menge $M \subseteq [0,1]$ und ein $F: M \to M$ mit $|F(a) - F(b)| < |a - b|$ für alle $a, b \in M$, $a \neq b$ die keinen Fixpunkt hat.

(b) Es sei $g \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass es genau ein $f_* \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ gibt mit

$$\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}]: \quad f_*(x) - x \int_0^{\frac{1}{2}} f_*(t)\,\mathrm{d}t = g(x).$$

Berechnen Sie f_*.
Hinweis: Definieren Sie eine Abbildung $F: C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}) \to C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ für die $F(f_*) = f_*$ genau dann wenn f_* obige Gleichung erfüllt. Zur Berechnung von f_* bestimmen Sie eine geschlossene Form der Fixpunkt-Iteration $f_{k+1} = F(f_k)$ für $k \in \mathbb{N}$ mit Startwert $f_0 = 0 \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$.

Aufgabe 40 Wir betrachten die Menge der Folgen in $\mathbb{C}$ deren zugehörige Reihe absolut konvergiert, d.h.

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \left\{ (x_j) \text{ Folge in } \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \text{ konvergiert} \right\}$$

und wir setzen

$$\|(x_j)\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|.$$

Zeigen Sie, dass $\| \,.\, \|_1$ eine Norm auf $\ell^1(\mathbb{N})$ ist und, dass $(\ell^1(\mathbb{N}), \| \,.\, \|_1)$ ein Banachraum ist.