KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 13.07.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

12. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17

Abgabe bis 20.07.2017, 12:00

Aufgabe 45 Finden Sie eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ so, dass ...

(a) ... für je zwei Lösungen $y_1, y_2 : J \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auch $y_1 + y_2$ eine Lösung ist.

(b) ... $y(x) = \sinh(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$ liefert.

(c) ... ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$ für mindestens ein $(0, y_0) \in D$ eine eindeutige Lösung mit maximalem Existenzintervall $(-1, 1)$ hat.

(d) ... ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$ für mindestens ein $(0, y_0) \in D$ keine Lösung besitzt.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 46 (K) (a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ferner sei $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ und es gelte $\|y(x) - y_\infty\| \to 0$ für $x \to \infty$ für eine $y_\infty \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f(y_\infty) = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= -xy_1 + 2x(x-1)y_2, & y_1(0) &= 0, \\ y_2' &= y_2^2 & y_2(0) &= 1, \end{aligned}$$

eine eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung $y = (y_1, y_2) \in C^1(J, \mathbb{R}^2)$ besitzt und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 47 (K) Sei

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x, v) = \begin{cases} \sin^2(xv)\cos\left(\frac{x}{v}\right), & (x, v) \in [0,1] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 0, & (x, v) \in [0,1] \times \{0\} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0$$

für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $y \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ besitzt.

Aufgabe 48 Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, s \in C(I, \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und $x_0 \in I$ sowie $y_0 > 0$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Differentialgleichungen dieser Form heißen *Bernoullische Differentialgleichung*. Der Ansatz $y(x) = (u(x))^\lambda$ mit $\lambda = \frac{1}{1-\alpha}$ und einem $u \in C^1(I_0, \mathbb{R})$ wobei $I_0 \subseteq I$ führt nach einer formalen Rechnung zu der Gleichung

$$u'(x) = (1-\alpha)a(x)u(x) + (1-\alpha)s(x), \quad u(x_0) = y_0^{1-\alpha}. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(I_0, \mathbb{R})$ eine Lösung von (2) und $u(x) > 0$ für alle $x \in I_0$, dann wird durch $y(x) = (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$ für $x \in I_0$ eine Lösung von (1) gegeben.

(b) Seien nun konkret $a, s \in C((0, \infty), \mathbb{R})$; $a(x) = \frac{1}{x}$, $s(x) = x$ und $\alpha = -1$, $x_0 = y_0 = 1$. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (1) auf dem Intervall $(\mathrm{e}^{-1/2}, \infty)$.

Die Anmeldung zum Analysis II Übungsschein ist für alle Studierenden freigeschaltet.

Der **Anmeldezeitraum** endet am **28.07.2017**.

Die Termine für die nächsten Klausuren zu Analysis I und Analysis II sind

Analysis I : 28.09.2017, 8 – 10 Uhr,
Analysis II : 28.09.2017, 11 – 13 Uhr.

Anmeldeschluss für diese Klausuren: **13.09.2017**.

Angebot „Lernraum Mathematik“

Für Frage, die im Rahmen der **Prüfungsvorbereitung** auf die Klausuren Analysis oder Lineare Algebra auftreten, steht zu den folgenden 9 Terminen jeweils von **14:00 – 15:45** im **SR 1.067** eine Betreuungsperson zur Verfügung:

- Mi 13.9. / Do 14.9. / Fr 15.9.: Pascal Zschumme,
- Mo 18.9. / Di 19.9. / Mi 20.9.: Benjamin Waßermann,
- Mo 25.9. / Di 26.9. / Mi 27.9.: Fabian Hornung.