KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 20.07.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

13. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17

Abgabe bis 27.07.2017, 12:00

Aufgabe 49 (a) Bestimmen Sie ein Funkdamentalsystem von $y' = Ay$ und die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = (7, 8, 9)^\top$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $b(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay + b(x)$ und die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay + b(x)$, $y(0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$.

Die Lösung dieser Aufgabe wird in der Übung am 21.07.2017 vorgerechnet.

Aufgabe 50 (K) (a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ und sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay + b(x), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Nehmen Sie an eine Fundamentalmatrix $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Differenrialgleichung $y' = Ay$ sei gegeben durch

$$Y(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{3x} & 0 & \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{3x} \\ 2x\mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^x & 2x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{3x} & 0 & \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix A.

Aufgabe 51 (K) Bestimmen Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = Ax$ und die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = y_0$.

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 52 Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $Y : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = A(x)y$. Weiter seien $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$ sowie $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben ist durch

$$y(x) = Y(x)Y(x_0)^{-1}y_0 + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} b(t)\,\mathrm{d}t.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $Y'(x) = A(x)Y(x)$ *und dann, dass*

$$y_s : I \to \mathbb{R}^n; \quad y_s(x) = Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} b(t)\,\mathrm{d}t$$

eine spezielle Lösung von $y' = A(x)y + b(x)$ *ist.*

Die Anmeldung zum Analysis II Übungsschein ist für alle Studierenden freigeschaltet.

Der **Anmeldezeitraum** endet am **28.07.2017**.

Die Termine für die nächsten Klausuren zu Analysis I und Analysis II sind

Analysis I : 28.09.2017, 8 – 10 Uhr,
Analysis II : 28.09.2017, 11 – 13 Uhr.

Anmeldeschluss für diese Klausuren: **13.09.2017**.

Angebot „Lernraum Mathematik“

Für Frage, die im Rahmen der **Prüfungsvorbereitung** auf die Klausuren Analysis oder Lineare Algebra auftreten, steht zu den folgenden 9 Terminen jeweils von **14:00 – 15:45** im **SR 1.067** eine Betreuungsperson zur Verfügung:

- Mi 13.9. / Do 14.9. / Fr 15.9.: Pascal Zschumme,
- Mo 18.9. / Di 19.9. / Mi 20.9.: Benjamin Waßermann,
- Mo 25.9. / Di 26.9. / Mi 27.9.: Fabian Hornung.