KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 04.05.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

2. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17

Abgabe bis 11.05.2017, 12:00

Aufgabe 5 (K) (a) Untersuchen Sie jeweils, ob die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ einen Grenzwert besitzt für $(x,y) \to (0,0)$, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$1) \quad f(x,y) = \frac{x^4 + |y|}{\sqrt{x^4 + |y| + 1} - 1},$$
$$2) \quad f(x,y) = \frac{yx}{\mathrm{e}^{y^2} - 1 + x^2}.$$

(b) Welche der folgenden Funktionen sind im Punkt $(0,0)$ stetig?

$$1) \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} (1 + |xy|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$2) \quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} \sin(x-y), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Aufgabe 6 (K) (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion

$$g : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 0\} \to \mathbb{R}; \quad g(x,y,z) = \tfrac{x\mathrm{e}^y}{z}.$$

(b) Untersuchen Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit im Punkt $(0,0)$ und geben Sie gegebenenfalls den Gradienten an.

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2+y^2} \sin(xy^2 - x^2y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ sowie $\frac{\partial f}{\partial y}$. Weisen Sie nach, dass diese beiden Ableitungen im Punkt $(0,0)$ nicht stetig sind.

Aufgabe 7 Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die partiellen Ableitungen $f_{xy}(0,0)$ und $f_{yx}(0,0)$ existieren und berechnen Sie diese.

Aufgabe 8 (a) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Erinnerung $f^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in M\}$.

1) Zunächst sei D offen. Zeigen Sie dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind.

(i) f ist stetig.

(ii) Für jede offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(O)$ offen.

2) Sei D jetzt abgeschlossen. Zeigen Sie, dass auch die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind.

(i) f ist stetig.

(iii) Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $d \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a):

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot v < d\} \quad \text{ist offen} \qquad \text{und} \qquad \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot v \leq d\} \quad \text{ist abgeschlossen.}$$