KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

11.05.2017

# 3. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17

**Abgabe bis 18.05.2017, 12:00**

**Aufgabe 9 (K)** (a) Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x-y) \\ \cos(x-y) \\ y\sinh(x) \end{pmatrix}, \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$g(u,v,w) = \begin{pmatrix} \log(1+u^2+v^2) \\ w^2 - uv \end{pmatrix}, \quad \text{für } (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie die Jacobimatrizen von $f$, $g$ und $g \circ f$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x \cdot (Mx)$. Zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung $f'(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$. Verzichten Sie dabei auf die Berechnung der partiellen Ableitungen von $f$.

**Aufgabe 10 (K)** (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z}{x^4+y^4+z^4}, & (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

im Ursprung $(0,0,0)$. Ist $f$ dort differenzierbar?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}\big(\cosh(x+9y) - 1\big), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

**Aufgabe 11** (a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $u : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(t,x) := (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right)$. Zeigen Sie, dass $u$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist und die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(t,x)$$

erfüllt für alle $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$.

(b) Es seien $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $D := I_1 \times I_2$ sowie $f : D \to \mathbb{R}$ auf $D$ partiell differenzierbar. Zusätzlich seien die partiellen Ableitungen $f_x, f_y : D \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass $f$ stetig ist auf $D$.

**Aufgabe 12** Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Man nennt $f$ homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn

$$\forall t > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \; : \; f(tx) = t^\alpha f(x).$$

(a) Nehmen Sie an, die Funktion $f$ sei differenzierbar auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t > 0$ gelten

$$f'(x) \cdot x = \alpha f(x) \qquad \text{und} \qquad f'(tx) = t^{\alpha-1} f'(x).$$

(b) Es sei $\alpha = 1$ und $f$ differenzierbar in 0. Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ linear ist.
*Hinweis: Zeigen Sie zunächst $f(0) = 0$.*