KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 18.05.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

# 4. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17
**Abgabe bis 26.05.2017, 13:00**

**Aufgabe 13** (a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer und offen sowie $f : D \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar auf $D$ und außerdem Lipschitzstetig. Zeigen Sie, dass die Jacobimatrix $J_f$ auf $D$ beschränkt ist, das heißt es existiert ein $C \geq 0$ mit $\|J_f(x)\| \leq C$ für alle $x \in D$.

(b) Sei $D = (0,2)^2 \setminus [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $g : D \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Beweisen Sie: Wenn es ein $c > 0$ gibt mit $\|\operatorname{grad} g(x)\| \leq M$ für alle $x \in D$ dann gilt die Abschätzung

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \sqrt{2}M\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

**Aufgabe 14 (K)** (a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x^3y + x^2y^2z^2 - 6x + 3z$. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(1,-1,1)$ für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$ existiert und berechnen Sie diese.

(b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \sqrt{\|(x,y)\| + 1}, & (x,y) \in Q, \\ \cos(\|(x,y)\|), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus Q, \end{cases}$$

wobei $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ und } y > 0\}$. Für welche Richtungsvektoren $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)$?

**Aufgabe 15 (K)** Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir das $k$-te Taylorpolynom von $f$ im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0)$ durch

$$(T_k f)((x,y);(x_0,y_0)) := \sum_{j=0}^{k} \frac{((x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla)^j \, f(x_0, y_0)}{j!}.$$

(a) Bestimmen Sie die 2. Taylorpolynome $(T_2 f)((x,y);(\log \pi, 0))$ und $(T_2 f)((x,y);(0,0))$ von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y) = y\mathrm{e}^{x+y} - x.$$

(b) Bestimmen Sie das 3. Taylorpolynom $(T_3 g)((x,y);(0,0))$ von

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad g(x,y) = \sin(x\mathrm{e}^y).$$

**Aufgabe 16** (a) Es seien $k, m, n \in \mathbb{N}$ sowie $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $E \subseteq \mathbb{R}^k$ beide offen und nichtleer. Weiter seien $g : D \to \mathbb{R}^m$ und $h : E \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar auf ihren Definitionsbereichen. Zeigen Sie, dass

$$F : D \times E \to \mathbb{R}; \quad F(x,y) := g(x) \cdot h(y)$$

differenzierbar ist und drücken Sie die Ableitung von $F$ durch die Ableitungen von $g$ und $h$ aus.

(b) Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\Phi'$. Für welche $(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3$ ist die Jacobimatrix $\Phi'(r, \varphi, \theta)$ invertierbar?

## Information

Die **Vorlesung** die wegen des Feiertags am 15.06.2017 nicht stattfinden kann wird auf den Termin der Übung (16.06.2017, **11:30 - 13:00, Nusselt-Hörsaal**) verlegt.
Die **Übung** ist in dieser Woche am 16.06.2017 um **15:45 - 17:15** im **Fritz-Haller Hörsaal** (HS37).

Auch in diesem Semester wird wieder ein **Lernraum für Mathematikstudenten** im zweiten Semester (Analysis und Lineare Algebra) zur Verfügung stehen. Dieser soll eine Plattform zur Förderung des gegenseitigen Austauschs, des Lernprozesses und der Eigenaktivität bieten. Zusätzlich werden in drei Blöcken Mitarbeiter der Fakultät anwesend sein, um bei fachlichen Fragen behilflich zu sein, nicht jedoch um Lösungen zu Aufgaben preiszugeben. Die Termine:

| Tag | Uhrzeit | Raum | Betreuung |
|---|---|---|---|
| Dienstag | 09:45 – 11:15 | SR 3.069 | Fabian Hornung |
| Dienstag | 11:30 – 13:00 | SR 3.069 | |
| Dienstag | 14:00 – 15:30 | SR -1.013 | |
| Mittwoch | 09:45 – 11:15 | SR -1.013 | |
| Mittwoch | 11:30 – 13:00 | SR -1.013 | Pascal Zschumme |
| Mittwoch | 14:00 – 17:15 | SR 3.068 | |
| Donnerstag | 09:45 – 11:15 | SR 2.058 | Benjamin Waßermann |