KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 24.05.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

5. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17

Abgabe bis 01.06.2017, 12:00

Aufgabe 17 (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) \mapsto y^2 - 3x^2y + x^4$. Zeigen Sie, dass für jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$\varphi_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \varphi_v(t) = f(tv)$$

ein lokales Minimum in $t = 0$ besitzt. (Somit besitzt die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum.) Weisen Sie auch nach, dass f in $(0,0)$ kein lokales Minimum besitzt. *Hinweis: Betrachten Sie die Punkte* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *mit* $y = x^2$.

(b) Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \quad g(x) = \sum_{k=1}^{m} \|x - a_k\|^2.$$

Zeigen Sie, dass g ein striktes globales Minimum besitzt, d.h. es gibt ein $a_* \in \mathbb{R}^n$ mit $g(a_*) < g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 18 (K) (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie: Ist Q positiv (negativ) definit, dann ist die Matrix invertierbar und die Inverse Q^{-1} ist ebenfalls positiv (negativ) definit.

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen und konvex und sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Weiter seien $x, y \in D$ mit $x \neq y$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : (-r, 1 + r) \to \mathbb{R}; \quad F(t) = f(x + t(y - x)),$$

zweimal stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen. Hierbei sei $r > 0$ derart gewählt, dass $x + t(y - x) \in D$ für alle $t \in (-r, 1 + r)$, siehe die Bemerkung unten.

(c) Seien wieder $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, offen und konvex und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Weiter gelte

$$w \cdot (H_f(x)w) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in D \text{ und } w \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie: Besitzt f einen stationären Punkt $x_0 \in D$, dann hat f in diesem Punkt ein globales Minimum. Ist zusätzlich $H_f(x_0)$ positiv definit, dann hat f in x_0 ein globales striktes Minimum.

Aufgabe 19 (K) (a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

und entscheiden Sie jeweils, ob f an diesen Stellen ein lokales Maximum oder Minimum hat.

(b) Sei $D := [0,5] \times [0,2]$ und

$$g : D \to \mathbb{R}; \quad g(u,v) = \tfrac{1}{2}u^4 - u^2v^2 + 54v - 9.$$

Beweisen Sie, dass es Punkte $x_1, x_2 \in D$ gibt so, dass $g(x_1) = \min_{x\in D} g(x)$ und $g(x_2) = \max_{x\in D} g(x)$. Beweisen Sie weiter, dass x_1, x_2 auf dem Rand von D liegen.

(c) Sei $E = U_1(0,0)$. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$h : \overline{E} \to \mathbb{R}; \quad h(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Zeigen Sie weiter, dass h Maximum und Minimum annimmt und bestimmen Sie diese Werte. *Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass der Rand von $\overline{E}$ gegeben ist durch die Menge* $\{(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \mid \alpha \in [-\pi, \pi]\}$.

Aufgabe 20 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, also $A^\top = A$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$q : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}; \quad q(x) = \frac{x \cdot (Ax)}{\|x\|^2}$$

differenzierbar ist, und berechnen Sie ihre Ableitung in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Beweisen Sie, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann ein stationärer Punkt von q ist, wenn er ein Eigenvektor von A ist. In diesem Fall ist $q(x)$ der zugehörige Eigenwert.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass A einen reellen Eigenwert besitzt.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = q(S)$ *wobei* $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

Bemerkung zur Existenz von r aus Aufgabe 18 (b): Da D offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq D$ und $U_\varepsilon(y) \subseteq D$. Wir setzten $r := \varepsilon / \|y - x\|$. Wenn $t \in (-r, 0)$, dann ist $\|t(y-x)\| < \varepsilon$ und somit $x + t(y-x) \in U_\varepsilon(x) \subseteq D$. Auf der anderen Seite gilt für $t \in (1, 1+r)$, dass $t - 1 \in (0, r)$ und deshalb

$$x + t(y-x) = x + y - x + (t-1)(y-x) = y + (t-1)(y-x) \in U_\varepsilon(y) \subseteq D.$$

Information

Die **Vorlesung** die wegen des Feiertags am 15.06.2017 nicht stattfinden kann wird auf den Termin der Übung (16.06.2017, **11:30 - 13:00, Nusselt-Hörsaal**) verlegt.
Die **Übung** ist in dieser Woche am 16.06.2017 um **15:45 - 17:15** im **Fritz-Haller Hörsaal** (HS37).