KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 01.06.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

6. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17

Abgabe bis 08.06.2017, 12:00

Aufgabe 21 (a) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-y} \\ \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung U des Punktes $(0, 0)$ gibt sowie eine offene Umgebung V des Punktes $(2, 1)$ so, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist. Berechnen Sie für die Umkehrfunktion $(f|_U)^{-1} : V \to U$ die Ableitung an der Stelle $(2, 1)$.

(b) Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung I von $0 \in \mathbb{R}$ existiert und eine Funktion $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ mit $g(0) = \pi$, welche die Gleichung

$$xg(x)^2 + 2x^2\mathrm{e}^{g(x)} = \sin(g(x))$$

für alle $x \in I$ erfüllt. Berechnen Sie außerdem $g'(0)$.

Aufgabe 22 (K) (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\sin(y) + \arctan(x)\sin(y) \\ -\mathrm{e}^x \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es zu jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung U gibt derart, dass $f|_U : U \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist. Zeigen Sie weiter, dass f nicht injektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(2, 5)$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(-1, 0)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to \mathbb{R}^2$ so gibt, dass alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + uy + \mathrm{e}^v &= 0, \\ 2x + u^2 - uv &= 5 \end{aligned}$$

in $U \times V$ durch $(x, y, g(x, y))$ mit $(x, y) \in U$ gegeben sind. Berechnen Sie $g'(2, 5)$.

Aufgabe 23 (K) (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x^3 - xy^2 \\ x^2y - y^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ für die offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ existieren mit $x_0 \in U$ und $f(x_0) \in V$ so, dass $f|_U : U \to V$ bijektiv ist und eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion besitzt. Bestimmen Sie in diesem Fall auch $(f^{-1})'(f(x_0))$.
Hinweis: Der Umkehrsatz liefert nur eine hinreichende Bedingung.

(b) In der Vorlesung wurde der Satz über implizit definierte Funktionen mit Hilfe des Umkehrsatzes nachgewiesen. Es lässt sich auch der Umkehrsatz unter Verwendung des Satzes über implizit definierte Funktionen beweisen. Führen Sie diesen Beweis aus.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $F : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $F(x, y) = f(x) - y$

Aufgabe 24 Finden Sie jeweils eine Funktion $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $F(0, 0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$ und der folgenden Eigenschaft.

(a) In jeder Umgebung von 0 gibt es ein x, für das die Gleichung $F(x, y) = 0$ keine Lösung besitzt.

(b) Die Gleichung $F(x, y) = 0$ hat für jedes $x \neq 0$ genau zwei verschiedene Lösungen (x, y_1) und (x, y_2).

(c) Die Gleichung $F(x, y) = 0$ kann in einer Umgebung von 0 eindeutig nach y aufgelöst werden und die Lösung $x \mapsto y(x)$ ist in 0 nicht differenzierbar.

(d) Die Gleichung $F(x, y) = 0$ kann in einer Umgebung von 0 eindeutig nach y aufgelöst werden und die Lösung $x \mapsto y(x)$ ist stetig differenzierbar.

Information

Die Anmeldung zum Analysis II Übungsschein ist ab sofort für alle Studierenden freigeschaltet.

Der **Anmeldezeitraum** endet am **28.07.2017**.

Die Termine für die nächsten Klausuren zu Analysis I und Analysis II sind

Analysis I : 28.09.2017, 8 – 10 Uhr,
Analysis II : 28.09.2017, 11 – 13 Uhr.