KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 08.06.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

7. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17

Abgabe bis 16.06.2017, 13:00

Aufgabe 25 (a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x, y) = xy^2$ auf der Menge

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x, y) = 0\}$$

Minimum und Maximum annimmt und bestimmen Sie diese sowie die zugehörigen Extremalstellen. Hierbei sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Es sei $M = E \cap K \subseteq \mathbb{R}^3$ wobei

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 3\} \quad \text{und} \quad K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 = z^2\}$$

Zeigen Sie, dass es Punkte $\xi_0, \zeta_0 \in M$ gibt mit

$$\|\xi_0\| = \min_{\xi \in M} \|\xi\| \quad \text{und} \quad \|\zeta_0\| = \max_{\xi \in M} \|\xi\|$$

und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 26 (K) (a) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$. Weiter sei

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 5 \text{ und } z = y\}.$$

Zeigen Sie, dass $f|_T$ Minimum und Maximum annimmt.
Zeigen Sie, dass die Multiplikatorenregel von Lagrange anwendbar ist.
Bestimmen Sie $\xi_0, \zeta_0 \in T$ mit $f(\xi_0) = \min_{\xi \in T} f(\xi)$ und $f(\zeta_0) = \max_{\xi \in T} f(\xi)$.

(b) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema, das Minimum und das Maximum von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad f(x, y, z) = 6x + y - 4z$$

auf der Menge $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\}$.

Aufgabe 27 (K) (a) Berechnen Sie jeweils die Weglängenfunktion des angegebenen Weges γ.

(1) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3; \quad \gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), \cos(\frac{t}{2}))$.

(2) $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3; \quad \gamma(t) = (t^2 \cos(t), t^2 \sin(t), \frac{t^3}{3})$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes nicht leeres Intervall sowie $h \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Weiter gebe es $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ so, dass $h|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$ für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$. Zeigen Sie, dass $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

$$\gamma(t) := (t, h(t)).$$

rektifizierbar ist und bestimmen Sie die zugehörige Weglängenfunktion.
$h|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n)$ *bedeutet, dass für jedes* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *die Komponentenfunktion* h_j *stetig differenenziebar ist auf* $[t_{k-1}, t_k]$*, d.h.* $h_j \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R})$*. Insbesondere existieren linksseitige und rechtsseitige Ableitung von* h_j *in den Punkten* t_k*, müssen aber nicht gleich sein.*

Aufgabe 28 (a) Zeigen Sie: Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann rektifizierbar, wenn sein inverser Weg γ^- rektifizierbar ist. In diesem Fall gilt $L(\gamma) = L(\gamma^-)$.

(b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie: Ist der Weg γ rektifizierbar, so ist auch der Weg $\varphi \circ \gamma$ rektifizierbar, und ist $M \geq 0$ eine Lipschitz-Konstante von φ, dann gilt

$$L(\varphi \circ \gamma) \leq M\, L(\gamma).$$

Information

Die **Vorlesung** die wegen des Feiertags am 15.06.2017 nicht stattfinden kann wird auf den Termin der Übung (16.06.2017, **11:30 - 13:00, Nusselt-Hörsaal**) verlegt.
Die **Übung** ist in dieser Woche am 16.06.2017 um **15:45 - 17:15** im **Fritz-Haller Hörsaal** (HS37).

Die Anmeldung zum Analysis II Übungsschein ist ab sofort für alle Studierenden freigeschaltet.

Der **Anmeldezeitraum** endet am **28.07.2017**.

Die Termine für die nächsten Klausuren zu Analysis I und Analysis II sind

Analysis I : 28.09.2017, 8 – 10 Uhr,
Analysis II : 28.09.2017, 11 – 13 Uhr.