KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 14.06.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

8. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17
Abgabe bis 22.06.2017, 13:00

Aufgabe 29 (K) (a) Zeigen Sie für die folgenden Wege γ jeweils dass sie glatt sind und bestimmen Sie die Parameterdarstellung mit der Weglänge als Parameter.

(1) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3;\ \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t),$ (2) $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2;\ \gamma(t) = \mathrm{e}^{t/10}(\cos(t), \sin(t)).$

(b) Geben Sie drei paarweise nicht äquivalente Wege an, die alle den selben Bogen parametrisieren. Beweisen Sie für zwei der von Ihnen angegebenen Wege, dass Sie nicht äquivalent sind.

(c) Zeigen Sie, dass der Weg $\gamma_1 : [0, 2] \to \mathbb{R};\ \gamma_1(t) = 2t$ glatt ist. Zeigen Sie weiter, dass der Weg

$$\gamma_2 : [0, 2] \to \mathbb{R};\ \gamma_2(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 1) \\ 3t - 2, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

nicht glatt ist, aber den gleichen Bogen parametrisiert wie γ_1.

Aufgabe 30 (K) Berechnen Sie für die angegeben Funktionen f, γ jeweils das Wegintegral $\int_\gamma f(x) \cdot \mathrm{d}x$ längs des Weges γ.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ f(x, y) = (\mathrm{e}^x, xy),$ $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2;\ \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$
(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ f(x, y, z) = (y, -z, x),$ $\gamma : [0, \log(2)] \to \mathbb{R}^3;\ \gamma(t) = (\sinh(t), \cosh(t), \sinh(t)),$
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ f(x, y) = (x^2 y, -y),$ $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2;\ \gamma(t) = (t^2, t^3 - 1),$
(d) $f : D \to \mathbb{R}^2;\ f(x, y) = \left(x^{42} y^{41}, \dfrac{-1}{1 + xy^2}\right),$ $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2;\ \gamma(t) = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}).$

In Aufgabenteil (d) ist $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

Aufgabe 31 Sei $\gamma \in C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$ ein glatter Weg. Wir setzen $l := L(\gamma)$ und bezeichnen $s : [a, b] \to [0, l]$ die Weglängenfunktion von γ und mit $\widehat{\gamma} : [0, l] \to \mathbb{R}^n$ die Parameterdarstellung nach der Weglänge.

(a) Zeigen Sie, dass auch $\widehat{\gamma}$ zweimal differenzierbar ist und dass die zweite Ableitung gegeben ist durch

$$\widehat{\gamma}''(s(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^2} \gamma''(t) - \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^4} \big(\gamma'(t) \cdot \gamma''(t)\big)\, \gamma'(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

(b) Weisen Sie nach, dass für jedes $\tau \in (0, l)$ die Vektoren $\widehat{\gamma}'(\tau)$ und $\widehat{\gamma}''(\tau)$ orthogonal sind.

Aufgabe 32 Berechnen Sie für die angegebenen Abbildungen g und γ jeweils $\int_\gamma g(v)\, \mathrm{d}s$ das Wegintegral bezüglich der Weglänge.

(a) $g : [-r, r] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ g(x, y) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{y}{r},$ $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2;\ \gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t)),$
(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ g(x, y, z) = x,$ $\gamma : [0, \log(5)] \to \mathbb{R}^3;\ \gamma(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\cos(t), \sin(t), \sqrt{2}).$

In Teil (a) sei hierbei $r > 0$.

Information

Die Anmeldung zum Analysis II Übungsschein ist ab sofort für alle Studierenden freigeschaltet.

Der **Anmeldezeitraum** endet am **28.07.2017**.

Die Termine für die nächsten Klausuren zu Analysis I und Analysis II sind

Analysis I : 28.09.2017, 8 – 10 Uhr,
Analysis II : 28.09.2017, 11 – 13 Uhr.