KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 11.05.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 1. Übungsblatt

Analysis II im SS 17

Aufgabe 1 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\| < \infty$. Außerdem sei $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, die Folge der Partialsummen, definiert durch

$$S^{(m)} := \sum_{k=1}^{m} x^{(k)}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie weiter dass für den Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)} := \lim_{m\to\infty} S^{(m)}$ gilt

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}\Big\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\|.$$

Lösung zu Aufgabe 1 Wir zeigen, dass $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da nach Voraussetzung die reelle Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\| < \infty$ konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $m > n \geq n_0$ gilt

$$\sum_{k=n+1}^{m} \|x^{(k)}\| < \varepsilon.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $m > n \geq n_0$ die Abschätzung

$$\Big\|S^{(m)} - S^{(n)}\Big\| = \Big\|\sum_{k=1}^{m} x^{(k)} - \sum_{k=1}^{n} x^{(k)}\Big\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x^{(k)}\| < \varepsilon.$$

Das zeigt, dass $(S^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und als solche auch konvergiert. Wir setzen $S := \lim_{m\to\infty} S^{(m)}$.

Es bleibt noch die zweite Behauptung zu zeigen. Zunächst folgern wir mit der unteren Dreiecksgleichung (Satz 1.1 (6)), dass

$$0 \leq \Big|\|S^{(m)}\| - \|S\|\Big| \leq \|S^{(m)} - S\| \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

Das bedeutet, dass $\|S^{(m)}\| \to \|S\|$ für $m \to \infty$. Die Dreiecksgleichung liefert jetzt für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\|S^{(m)}\| = \Big\|\sum_{k=1}^{m} x^{(k)}\Big\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|x^{(k)}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\|.$$

Somit gilt für den Grenzwert $\|S\| = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} x^{(k)}\Big\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^{(k)}\|$.

Aufgabe 2 (K) (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

abgeschlossen ist.
Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ jeweils auf Beschränktheit, Offenheit, Abgeschlossenheit und Kompaktheit.

(b) $B := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \|(a, b)\| < 42\}$
(c) $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 100 \text{ und } x \leq 2\}$
(d) $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < 1 \text{ und } x > 0\}$

Lösung zu Aufgabe 2 (a) Wenn A die leere Menge ist, dann ist A abgeschlossen. Sei A nicht leer und $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A mit Grenzwert $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Es ist zu zeigen, dass (x, y) in A liegt, das heißt $0 \le y \le f(x)$.

Zunächst folgt aus $\|(x_k, y_k) - (x, y)\|_{\mathbb{R}^2} \to 0$, $(k \to \infty)$, dass

$$x_k \to x,\ (k \to \infty) \qquad \text{und} \qquad y_k \to y,\ (k \to \infty).$$

Mit der Stetigkeit von f schließen wir weiter, dass $f(x_k) \to f(x)$ für $k \to \infty$. Da (x_k, y_k) zu A gehört, gilt $0 \le y_k \le f(x_k)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Diese Ungleichung bleibt im Grenzwert erhalten, also $0 \le y \le f(x)$.

(b) Wir verwenden, dass $a = |a| \le \|(a, b)\|$ und $b = |b| \le \|(a, b)\|$. Somit folgt für $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ mit $\|(a, b)\| < 42$, dass $0 \le a, b < 42$. Das bedeutet, dass $B \subseteq \{1, \ldots 41\} \times \{1, \ldots , 41\}$ eine endliche Menge ist. Als solche ist B beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Weiter ist B nicht leer, da zum Beispiel $(1, 1) \in B$. Jedoch ist für kein $\delta > 0$ die Umgebung $U_\delta(1, 1)$ in B enthalten und damit ist die Menge nicht offen.

(c) Für $(x, y) \in C$ gilt $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{100} = 10$. Das zeigt, dass C beschränkt ist. Wir weisen nach, dass C weder offen noch abgeschlossen ist. Für $k \in \mathbb{N}$ setze $(x_k, y_k) = (0, 10 - \frac{1}{k})$. Dann gilt $x_k \le 2$ und

$$x_k^2 + y_k^2 = 0^2 + (10 - \tfrac{1}{k})^2 < 10^2 = 100,$$

also $(x_k, y_k) \in C$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem konvergiert (x_k, y_k) offenbar gegen $(0, 10)$ für $k \to \infty$. Weil $(0, 10)$ nicht zu C gehört, ist C nicht abgeschlossen (Satz 2.2(3)). Insbesondere ist C nicht kompakt.
Alternativ kann man zeigen, dass $\mathbb{R}^2 \setminus C$ nicht offen ist. Beachte dazu, dass zwar $(0, 10) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, aber für jedes $\delta \in (0, 1)$ der Punkt $(0, 10) - (0, \frac{\delta}{2}) = (0, 10 - \frac{\delta}{2}) \in U_\delta(0, 10)$ nicht zu $\mathbb{R}^2 \setminus C$ gehört. Somit ist für kein $r > 0$ die Umgebung $U_r(0, 10)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus C$ enthalten.
Ganz ähnlich sieht man, dass für kein $s > 0$ die Umgebung $U_s(2, 0)$ in C enthalten ist, denn $(2 + \frac{s}{2}, 0)$ gehört nicht zu C. Also ist C nicht offen.

(d) Die Menge D ist nicht beschränkt, denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $(k, k) \in D$ (offenbar ist $|k - k| = 0 < 1$) und es gilt

$$\|(k, k)\| = \sqrt{k^2 + k^2} = \sqrt{2}k \to \infty \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wir schließen, dass D nicht kompakt ist. Die Folge $(\frac{k}{k+1}, 0)_{k\in\mathbb{N}}$ in D konvergiert gegen $(1, 0)$ und dieser Punkt gehört nicht zu D. Das bedeutet, dass D nicht abgeschlossen ist. Um zu zeigen, dass D offen ist, setzen wir $D' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < 1\}$ und erhalten

$$D = D' \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1\}.$$

In der Übung wurde zeigt, dass die Mengen der Form $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 1\}$ offen sind. Es reicht also zu beweisen, dass D' offen ist. Dazu schreiben wir

$$D' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < 1\} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} U_{1/\sqrt{2}}(x, x).$$

Für festes $x \in \mathbb{R}$ ist die Umgebung $U_{1/\sqrt{2}}(x, x)$ offen und damit D' offen als Vereinigung offener Mengen.

Aufgabe 3 (K) (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\{x_1, \ldots , x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge von paarweise orthogonalen Vektoren, d.h. $x_j \cdot x_k = 0$ für alle $j, k \in \{1, \ldots , m\}$ mit $j \ne k$. Zeigen Sie:

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m} x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^2$$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Lösung zu Aufgabe 3 (a) Die Norm auf $\mathbb{R}^n$ lässt sich darstellen durch $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ bzw. $\|x\|^2 = x \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Also gilt

$$\Big\|\sum_{j=1}^m x_j\Big\|^2 = \left(\sum_{j=1}^m x_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^m x_k\right).$$

Für festes $y \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $w \mapsto w \cdot y$ linear. Genauso ist $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $w \mapsto y \cdot w$ linear. Wir können also schreiben

$$\Big\|\sum_{j=1}^m x_j\Big\|^2 = \left(\sum_{j=1}^m x_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^m x_k\right) = \sum_{j=1}^m \left(x_j \cdot \left(\sum_{k=1}^m x_k\right)\right) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (x_j \cdot x_k).$$

Weil $x_j \cdot x_k = 0$, falls $j \neq k$, erhalten wir

$$\Big\|\sum_{j=1}^m x_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (x_j \cdot x_k) = \sum_{j=1}^m (x_j \cdot x_j) = \sum_{j=1}^m \|x_j\|^2.$$

(b) Wie in Teil (a) nutzen wir die Linearität des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) + (x-y)\cdot(x-y) \\
&= x\cdot(x+y) \ + \ y\cdot(x+y) \ + \ x\cdot(x-y) \ + \ (-y)\cdot(x-y) \\
&= x\cdot x \ + \ x\cdot y \ + \ y\cdot x \ + \ y\cdot y \ + \ x\cdot x \ - \ x\cdot y \ - \ y\cdot x \ + \ y\cdot y \\
&= 2(x\cdot x) + 2(y\cdot y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ nicht leer. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist A offen, so ist $A + B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists a \in A, b \in B : x = a + b\}$ offen.

(b) Ist A abgeschlossen und B kompakt, dann ist $A + B$ abgeschlossen.

(c) Sind A und B kompakt, so ist $A + B$ kompakt.

Lösung zu Aufgabe 4 (a) Sei A offen. Wir schreiben die Menge $A + B$ als

$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + \{b\}.$$

Wir zeigen zuerst, dass $A + \{b\}$ offen ist für ein beliebiges $b \in \mathbb{R}^n$. Dann folgt, dass $A + B$ offen ist als Vereinigung von offenen Mengen. Sei also $b \in \mathbb{R}^n$.
Zu jedem $x \in A + \{b\}$ müssen wir ein $\varepsilon > 0$ angeben so, dass die Umgebung $U_\varepsilon(x)$ in $A + \{b\}$ liegt. Wir finden ein $a \in A$ mit $x = a + b$. Da A offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq A$. Wir wollen zeigen, dass $U_\varepsilon(x) \subseteq A + \{b\}$ ist: Sei dazu $y \in U_\varepsilon(x)$. Dann ist $\|(y - b) - a\| = \|y - x\| < \varepsilon$, also $y - b \in U_\varepsilon(a) \subseteq A$ und somit $y = (y - b) + b \in A + \{b\}$.

(b) Sei A abgeschlossen und B kompakt. Sei (x_k) eine Folge in $A+B$ die gegen ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Dann ist zu zeigen, dass $x_0 \in A + B$.
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wähle $a_k \in A$ und $b_k \in B$ mit $x_k = a_k + b_k$. Da K kompakt ist, finden wir eine konvergente Teilfolge (b_{k_j}) von (b_k) mit Grenzwert $\lim_{j\to\infty} b_{k_j} =: b_0 \in B$. Aus der Gleichung $a_{k_j} = x_{k_j} - b_{k_j}$ folgt, dass auch (a_{k_j}) konvergiert. Weil A abgeschlossen ist erhalten wir $a_0 := \lim_{j\to\infty} a_{k_j} \in A$. Da die Teilfolge (x_{k_j}) gegen den selben Grenzwert x_0 konvergiert wie (x_k) folgt schließlich

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{j\to\infty} x_{k_j} = \lim_{j\to\infty} a_{k_j} + \lim_{j\to\infty} b_{k_j} = a_0 + b_0 \in A + B.$$

(c) Seien A und B kompakt. Dann ist B insbesondere abgeschlossen, also ist $A + B$ nach Teil (b) abgeschlossen. Da A und B beschränkt sind, sind $\alpha := \sup_{a\in A} \|a\| < \infty$ und $\beta := \sup_{b \in B} \|b\| < \infty$. Sei nun $x \in A + B$, dann finden wir $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|x\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq \alpha + \beta.$$

Das zeigt, dass auch $A + B$ beschränkt ist. Insgesamt ist $A + B$ eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und somit kompakt.