KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 13.07.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 10. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 37 Sei X ein Vektorraum. Zwei Normen $\|\,.\,\|$ und $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ auf X heißen *äquivalent*, wenn

$$\exists c_1, c_2 > 0\ \forall x \in X: \quad c_1\|x\| \le |\!|\!|x|\!|\!| \le c_2\|x\|.$$

Bemerkung: In diesem Fall sind in $(X, \|\,.\,\|)$ und in $(X, |\!|\!|\,.\,|\!|\!|)$ genau die gleichen Folgen konvergent bzw. Cauchyfolgen und genau die gleichen Mengen offen bzw. abgeschlossen.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass je zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

Hinweis: Vergleichen Sie zunächst eine beliebige Norm $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ auf $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm $\|\,.\,\|_2$. Es lässt sich zeigen, dass $|\!|\!|x|\!|\!| \le M\|x\|_2$, wobei $M := (\sum_{j=1}^n |\!|\!|e_j|\!|\!|^2)^{1/2}$ mit den Einheitsvektoren $e_j \in \mathbb{R}^n$. Auf der anderen Seite gilt $|\!|\!|x|\!|\!| \ge m\|x\|_2$, wobei $m := \min\{|\!|\!|v|\!|\!| \mid v \in \mathbb{R}^n, \|v\|_2 = 1\}$.

Lösung zu Aufgabe 37 Wir gehen vor, wie im Hinweis vorgeschlagen. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir können schreiben $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ wobei $e_j \in \mathbb{R}^n$ der j-te Einheitsvektor ist. Wie im Hinweis angegeben setzen wir $M := (\sum_{j=1}^n |\!|\!|e_j|\!|\!|^2)^{1/2} > 0$. Mit der Dreiecksgleichung für $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ folgt

$$|\!|\!|x|\!|\!| \le \sum_{j=1}^n |\!|\!|x_j e_j|\!|\!| = \sum_{j=1}^n |x_j|\,|\!|\!|e_j|\!|\!| \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |\!|\!|e_j|\!|\!|^2\right)^{1/2} = M\|x\|_2,$$

wobei wir am Ende die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung auf die Vektoren $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ und $(|\!|\!|e_1|\!|\!|, \dots, |\!|\!|e_n|\!|\!|)$ aus $\mathbb{R}^n$ angewendet haben. Es ist also gezeigt, dass

$$|\!|\!|x|\!|\!| \le M\|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{$\star$}$$

Für die andere Abschätzung betrachten wir $S := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2 = 1\}$. Offenbar ist S beschränkt und abgeschlossen in $(\mathbb{R}^n, \|\,.\,\|_2)$, also kompakt. Wegen der gerade gezeigten Abschätzung $(\star)$ ist die Abbildung $\nu : (\mathbb{R}^n, \|\,.\,\|) \to (\mathbb{R}, |\,.\,|)$; $\nu(x) = |\!|\!|x|\!|\!|$ stetig. In der Tat gilt: Sind $(x^{(k)})$ eine Folge in S und $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x^{(k)} - x\| \to 0$ für $k \to \infty$, dann folgt

$$|\nu(x^{(k)}) - \nu(x)| = \big||\!|\!|x^{(k)}|\!|\!| - |\!|\!|x|\!|\!|\big| \le |\!|\!|x^{(k)} - x|\!|\!| \le M\|x^{(k)} - x\|_2 \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Als stetige Funktion nimmt ν ihr Minimum auf der kompakten Menge S an, d.h. es existiert

$$m := \min_{v \in S} \nu(v) = \min\{|\!|\!|v|\!|\!| \mid v \in S\}.$$

Weil $0 \notin S$ und $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ eine Norm ist, haben wir $m > 0$. Da $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$ folgt nun

$$|\!|\!|x|\!|\!| = \left|\!\left|\!\left| \|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2} \right|\!\right|\!\right| = \|x\|_2 \left|\!\left|\!\left| \frac{x}{\|x\|_2} \right|\!\right|\!\right| \ge m\|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei jetzt $\|\,.\,\|$ eine beliebige weitere Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann existieren $\widetilde{m}, \widetilde{M} > 0$ mit

$$\begin{aligned} &\widetilde{m}\|x\|_2 \le \|x\| \quad \text{und} \quad \|x\| \le \widetilde{M}\|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \quad \|x\|_2 \le \tfrac{1}{\widetilde{m}}\|x\| \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{\widetilde{M}}\|x\| \le \|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Wir schließen, dass

$$\tfrac{m}{M}\|x\| \le m\|x\|_2 \le |||x||| \qquad \text{und} \qquad |||x||| \le M\|x\|_2 \le \tfrac{M}{m}\|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 38 (K) (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Für $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ definiere

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{C^1([a,b],\mathbb{R})} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Zeigen Sie, dass $\|\,.\,\|_{C^1}$ eine Norm ist und $(C^1([a,b],\mathbb{R}), \|\,.\,\|_{C^1})$ ein Banachraum.

(b) Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_{\max} = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$ für $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist. Bestimmen Sie Zahlen $c_1, c_2 > 0$ mit $c_1\|x\|_2 \le \|x\|_{\max} \le c_2\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Hierbei ist $\|\,.\,\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Lösung zu Aufgabe 38 (a) Zuerst weisen wir nach, dass $\|\,.\,\|_{C^1}$ eine Norm auf $C^1([a,b],\mathbb{R})$ ist. Es ist klar, dass $\|f\|_{C^1} \ge 0$ für alle $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. Gilt $\|f\|_{C^1} = 0$ für ein $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, dann ist wegen $0 \le \|f\|_\infty \le \|f\|_{C^1}$ auch $|f(t_0)| \le \|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)| = 0$ für alle $t_0 \in [a,b]$ und damit $f = 0$.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. Da $\|\,.\,\|_\infty$ eine Norm auf $C([a,b],\mathbb{R})$ ist, gilt

$$\|\alpha f\|_{C^1} = \|\alpha f\|_\infty + \|\alpha f'\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty + |\alpha|\|f'\|_\infty = |\alpha|\|f\|_{C^1}$$

Um die Dreiecksungleichung zu zeigen, seien $f, g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. Wieder mit den Norm-Eigenschaften von $\|\,.\,\|_\infty$ erhalten wir

$$\|f+g\|_{C^1} = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = \|f\|_{C^1} + \|g\|_{C^1}$$

Sei nun (f_k) eine Cauchyfolge in $C^1([a,b],\mathbb{R})$. Dann sind (f_k) und (f'_k) Folgen in $C([a,b],\mathbb{R})$. Wegen

$$\|f_k - f_l\|_\infty \le \|f_k - f_l\|_{C^1} \quad \text{und} \quad \|f'_k - f'_l\|_\infty \le \|f_k - f_l\|_{C^1} \quad \text{für alle } k, l \in \mathbb{N},$$

können wir schließen, dass (f_k) und (f'_k) Cauchyfolgen in $C([a,b],\mathbb{R})$ sind. In der Übung wurde gezeigt, dass $(C([a,b],\mathbb{R}), \|\,.\,\|_\infty)$ ein Banachraum ist. Somit gibt es Funktionen $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ derart, dass $\|f_k - f\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$ und $\|f'_k - g\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Nach Satz 23.18 aus Analysis I ist $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ und $f' = g$. Es folgt, dass $\|f_k - f\|_{C^1} \to 0$ für $k \to \infty$.

(b) Sei $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Es ist klar, dass $\|x\|_{\max} = \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} \ge 0$. Gilt $\|x\|_{\max} = 0$, dann haben wir $0 \le |x_j| \le \|x\|_{\max} \le 0$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$ und damit $x = 0$.
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|\alpha x\|_{\max} = \max\{|\alpha x_1|,\dots,|\alpha x_n|\} = \max\{|\alpha||x_1|,\dots,|\alpha||x_n|\} = |\alpha|\|x\|_{\max}.$$

Schließlich sei $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$. Für jedes $j \in \{1,\dots,n\}$ gilt $|x_j + y_j| \le |x_j| + |y_j| \le \|x\|_{\max} + \|y\|_{\max}$ und wir erhalten

$$\|x+y\|_{\max} = \max\{|x_1+y_1|,\dots,|x_n+y_n|\} \le \|x\|_{\max} + \|y\|_{\max}.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $j_0 \in \{1,\dots,n\}$ mit $\|x\|_{\max} = |x_{j_0}|$, sodass aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion gilt

$$\|x\|_{\max} = |x_{j_0}| = \left(|x_{j_0}|^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2.$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^n \|x\|_{\max}^2\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^n 1\right)^{1/2}\|x\|_{\max} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\|x\|_{\max} = \|x\|_{\max} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 39 (K) (a) Geben Sie je ein Beispiel an für ein $M \subseteq [0,1]$ und eine Funktion $F : M \to M$ mit $|F(a) - F(b)| \le |a - b|$ für alle $a, b \in M$, die ...

(i) ... keinen Fixpunkt besitzt, wobei M kompakt ist.

(ii) ... unendlich viele Fixpunkte hat, wobei M ein kompaktes Intervall ist.

(iii) ... genau einen Fixpunkt $x_* \in M$ besitzt, für welche aber die durch $x_{k+1} = F(x_k)$ $(k \in \mathbb{N})$ gegebene rekursive Folge nur konvergiert, wenn $x_0 = x_*$.

(iv) Geben Sie auch eine Beispiel an für eine nicht abgeschlossene Menge $M \subseteq [0,1]$ und ein $F : M \to M$ mit $|F(a) - F(b)| < |a - b|$ für alle $a, b \in M$ die keinen Fixpunkt hat.

(b) Es sei $g \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass es genau ein $f_* \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ gibt mit

$$\forall x \in [0, \tfrac{1}{2}] : \quad f_*(x) - x \int_0^{\frac{1}{2}} f_*(t)\,\mathrm{d}t = g(x).$$

Berechnen Sie f_*.
Hinweis: Definieren Sie eine Abbildung $F : C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}) \to C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$ für die $F(f_*) = f_*$ genau dann wenn f_* obige Gleichung erfüllt. Zur Berechnung von f_* bestimmen Sie eine geschlossene Form der Fixpunkt-Iteration $f_{k+1} = F(f_k)$ für $k \in \mathbb{N}$ mit Startwert $f_0 = 0 \in C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$.

Lösung zu Aufgabe 39 (a) (i) Wir wählen $M = \{0, 1\}$ und $F : M \to \mathbb{R}$; $F(a) = 1 - a$. Dann ist M kompakt und es ist offensichtlich, dass $F(M) \subseteq M$. Weiter gilt $|F(a) - F(b)| = |1 - a - 1 + b| = |b - a|$ für alle $a, b \in M$. Wäre nun $x_* = F(x_*) = 1 - x_*$, dann würde $2x_* = 1$ bzw. $x_* = \frac{1}{2}$ gelten. Da aber $\frac{1}{2} \notin M$, besitzt F keinen Fixpunkt.

(a) (ii) Wir wählen $M = [0, 1]$ und $F : M \to \mathbb{R}$; $F(a) = a$. Dann ist M ein kompaktes Intervall und es ist klar, dass $F(M) \subseteq M$ sowie $|F(a) - F(b)| = |a - b|$ für alle $a, b \in M$. Natürlich gilt $F(x_*) = x_*$ für alle $x_* \in M$ und damit für unendlich viele $x_* \in M$.

(a) (iii) Wir wählen $M = [0, 1]$ und $F : M \to \mathbb{R}$; $F(a) = 1 - a$. Dann ist M kompakt und $F(M) \subseteq M$ Wie in Teil (i) sehen wir, dass $|F(a) - F(b)| = |b - a|$ für alle $a, b \in M$ und, dass $F(x_*) = x_*$ genau dann, wenn $x_* = \frac{1}{2} \in M$. Somit hat F genau einen Fixpunkt. Sei $x_0 \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$. Für die durch $x_{k+1} = F(x_k) = 1 - x_k$ definierte Folge (x_k) gilt dann

$$x_k = \begin{cases} x_0, & k \text{ ist gerade} \\ 1 - x_0, & k \text{ ist ungerade} \end{cases} \quad \text{und somit} \quad |x_k - \tfrac{1}{2}| = \begin{cases} |x_0 - \frac{1}{2}|, & k \text{ ist gerade} \\ |1 - x_0 - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2} - x_0|, & k \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

Wir sehen, dass $|x_k - \frac{1}{2}| \not\to 0$ für $k \to \infty$.

(a) (iv) Wir wählen $M = (0, \frac{1}{2})$ und $F : M \to \mathbb{R}$; $F(a) = a^2$. Dann ist M nicht abgeschlossen. Betrachte $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$; $G(a) = a^2$. Dann ist F die Einschränkung von G auf M. Offenbar sind G und F stetig differenzierbar mit $G'(a) = 2a = F'(a) > 0$ für alle $a \in [0, 1]$ bzw. $a \in M$. Einerseits folgt, dass F strikt wachsend ist und damit $0 < F(a) < G(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Das bedeutet $F(M) \subseteq M$. Andererseits folgt mit dem Mittelwertsatz, dass

$$|F(a) - F(b)| \leq \max_{\xi \in S[a,b]} |F'(\xi)||a - b| = \max_{\xi \in S[a,b]} \underbrace{2\xi}_{<1} |a - b| < |a - b|$$

für alle $a, b \in M$. Angenommen es gäbe einen Fixpunkt $x_* \in M$ von F. Wegen $x_* > 0$ folgt aus $x_* = F(x_*) = x_*^2$, dass $1 = x_*$. Da aber $1 \notin M$ ist das ein Widerspruch.

(b) Zur Abkürzung schreiben wir $M := C([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$. Aus der Übung wissen wir, dass M zusammen mit der Maximumsnorm $\|\,.\,\|_\infty$ ein Banachraum ist.
Für $f \in M$ setzen wir $F(f)(x) = x \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t + g(x)$ für $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Da $g \in M$ und die Funktion $[0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto cx$ stetig ist für jedes $c \in \mathbb{R}$, definiert dies eine Abbildung $F : M \to M$. Offenbar gilt für $f_* \in M$

genau dann $F(f_*) = f_*$, wenn f_* die Gleichung aus der Aufgabenstellung erfüllt.
Für $f_1, f_2 \in M$ gilt weiter

$$\begin{aligned}\|F(f_1) - F(f_2)\|_\infty &= \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \left| g(x) + x\int_0^{\frac{1}{2}} f_1(t)\,\mathrm{d}t - g(x) - x\int_0^{\frac{1}{2}} f_2(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \left(\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} x\right) \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \left[f_1(t) - f_2(t)\right] \mathrm{d}t \right| \le \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|_\infty \int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\|f_1 - f_2\|_\infty.\end{aligned}$$

Das zeigt, dass F kontraktiv ist. Insgesamt sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes gezeigt und es gibt genau einen $f_* \in M$ mit $F(f_*) = f_*$.

Wie im Hinweis angegeben betrachten wir die Folge (f_k) in M gegeben durch $f_0 = 0$ und $f_{k+1} = F(f_k)$ für $k \in \mathbb{N}$. Aus dem Fixpunktsatz wissen wir auch, dass $f_k \to f_*$ für $k \to \infty$ bezüglich $\|\,.\,\|_\infty$. Also konvergiert die Folge gleichmäßig und insbesondere punktweise gegen f_*.
Berechnen wir ein paar Glieder dieser Folge, dann bekommen wir die Idee, dass

$$f_k = (\,.\,)\left(\sum_{j=0}^{k-2} \frac{1}{8^j}\right) \int_0^{\frac{1}{2}} g(s)\,\mathrm{d}s + g$$

gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge 2$. Diese Behauptung beweisen wir mit vollständiger Induktion:
Zunächst ist $f_1 = F(0) = g$ und somit $f_2 = F(f_1) = (\,.\,)\int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t + g$. Somit ist die Behauptung für $k = 2$ erfüllt.
Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge 2$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x) = F(f_k)(x) = x\int_0^{\frac{1}{2}} f_k(t)\,\mathrm{d}t + g(x) &= x\int_0^{\frac{1}{2}} \left[t\left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{8^j}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)\,\mathrm{d}s + g(t)\right] \mathrm{d}t + g(x) \\ &= x\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\,\mathrm{d}t\right)\left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{8^j}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t\right] + g(x) \\ &= x\left(\sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{8^{j+1}}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)\,\mathrm{d}s + x\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)\,\mathrm{d}s + g(x) = x\left(\sum_{j=0}^{(k+1)-2}\frac{1}{8^j}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)\,\mathrm{d}s + g(x)\end{aligned}$$

Weil $\sum_{j=0}^{k-2}\frac{1}{8^j}$ die $(k-2)$-te Partialsumme der geometrischen Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$ mit $q = \frac{1}{8}$ ist, folgt

$$f_k(x) \to \frac{8}{7}x\int_0^{\frac{1}{2}} g(s)\,\mathrm{d}s + g(x) \quad \text{für alle } x \in [0, \tfrac{1}{2}].$$

Die Eindeutigkeit des Grenzwerts liefert, dass $f_*(x)$ durch die rechte Seite gegeben ist.

Aufgabe 40 Wir betrachten die Menge der Folgen in $\mathbb{C}$ deren zugehörige Reihe absolut konvergiert, d.h.

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \left\{ (x_j) \text{ Folge in } \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty}|x_j| \text{ konvergiert} \right\}$$

und wir setzen

$$\|(x_j)\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty}|x_j|.$$

Zeigen Sie, dass $\|\,.\,\|_1$ eine Norm auf $\ell^1(\mathbb{N})$ ist und, dass $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\,.\,\|_1)$ ein Banachraum ist.

Lösung zu Aufgabe 40 Seien $x = (x_j), y = (y_j) \in \ell^1(\mathbb{N})$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Falls $\|x\|_1 = 0$, so folgt $|x_{j_0}| \le \sum_{j=1}^{\infty}|x_j| = 0$, also $x_{j_0} = 0$ für alle $j_0 \in \mathbb{N}$ und damit auch $x = 0$. Weiter gelten

$$\|\alpha x\|_1 = \|(\alpha x_j)\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty}|\alpha x_j| = |\alpha|\sum_{j=1}^{\infty}|x_j| = |\alpha|\|x\|_1,$$

sowie (wegen der absoluten Konvergenz)

$$\|x+y\|_1 = \|(x_j+y_j)\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j| \le \sum_{j=1}^{\infty}\big(|x_j|+|y_j|\big) = \sum_{j=1}^{\infty}|x_j| + \sum_{j=1}^{\infty}|y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Sei nun $(x^{(k)})$ eine Cauchyfolge in $\ell^1(\mathbb{N})$. Für alle $j_0 \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$|x_{j_0}^{(k)} - x_{j_0}^{(l)}| \le \sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(k)} - x_j^{(l)}| = \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_1 \quad \text{für alle } k,l \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\big(x_{j_0}^{(k)}\big)_k$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$. Folglich existiert $v_{j_0} := \lim_{k\to\infty} x_{j_0}^{(k)}$. Wir definieren $v = (v_j)$. Nun werden wir zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}: \quad k \ge k_0 \implies \|x^{(k)} - v\|_1 \le \varepsilon.$$

Daraus folgt für $\varepsilon = 1$, dass $x^{(k_0)} - v \in \ell^1(\mathbb{N})$ ist. Damit ist dann auch $v = x^{(k_0)} - \big(x^{(k_0)} - v\big) \in \ell^1(\mathbb{N})$. Andererseits folgt, dass $x^{(k)} \to v$ für $k \to \infty$ in $\ell^1(\mathbb{N})$.

Sei also $\varepsilon > 0$. Wähle ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| \le \varepsilon$ für alle $k, l \ge k_0$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_0$ fest. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sum_{j=1}^{m}|x_j^{(k)} - x_j^{(l)}| \le \varepsilon \quad \text{für alle } l \ge k_0.$$

Da diese Summe endlich ist, folgt nach den Grenzwertsätzen auch

$$\sum_{j=1}^{m}|x_j^{(k)} - v_j| = \sum_{j=1}^{m}\lim_{l\to\infty}|x_j^{(k)} - x_j^{(l)}| = \lim_{l\to\infty}\sum_{j=1}^{m}|x_j^{(k)} - x_j^{(l)}| \le \varepsilon.$$

Da dies für alle $m \in \mathbb{N}$ der Fall ist, folgt schließlich auch

$$\|x^{(k)} - v\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(k)} - v_j| = \sup_{m\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{m}|x_j^{(k)} - v_j| \le \varepsilon,$$

was zu zeigen war.