KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 20.07.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 11. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 41 (I) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen

(a) $y' = 3y + \mathrm{e}^x \sin(x)$, (b) $y' = -2xy + x\mathrm{e}^{-x^2}$.

(II) Berechnen Sie jeweils die Lösung mit maximalem Definitionsbereich der Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen zum angegebenen Anfangswert.

(c) $y' = -\dfrac{x^2}{y^3}$, $y(0) = 1$, (d) $y' = \dfrac{1+y^2}{(1+x^2)y}$, $y(1) = 4$.

Lösung zu Aufgabe 41 (a) Die Differentialgleichung lässt sich schreiben als

$$y' = a(x)y + s(x)$$

mit $a, s \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch $a(x) = 3$ bzw. $s(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Es handelt sich also um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Jede Lösung y ist von der Form

$$y(x) = C_0 \mathrm{e}^{A(x)} + c(x)\mathrm{e}^{A(x)}$$

wobei $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von a ist und $c \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Stammfunktion der Funktion $s \cdot \exp(-A(\,.\,))$. Offenbar können wir $A(x) = 3x$ für $x \in \mathbb{R}$ ist wählen. Weiter berechnen wir mit zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned} c(x) &:= \int \mathrm{e}^x \sin(x)\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x = \int \underset{\uparrow}{\sin(x)}\underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2\int \underset{\uparrow}{\cos(x)}\underset{\downarrow}{\mathrm{e}^{-2x}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2\sin(x)\mathrm{e}^{-2x} - 4\int \sin(x)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Es folgt

$$c(x) = -\tfrac{1}{5}\big(2\sin(x) + \cos(x)\big)\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ist also $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Lösung der Differentialgleichung, dann gibt es ein $C_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$y(x) = C_0\mathrm{e}^{3x} - \tfrac{1}{5}\big(2\sin(x) + \cos(x)\big)\mathrm{e}^{x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(b) In dieser Aufgabe ist die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = a(x)y + s(x)$$

zu lösen mit $a, s \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch $a(x) = -2x$ und $s(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$. Sicherlich ist $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch $A(x) = -x^2$ eine Stammfunktion von a. Des weiteren berechnen wir

$$c(x) := \int s(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2$$

Das definiert eine Funktion $c \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Ist $y \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine Lösung der Differentialgleichung, dann gibt es ein $C_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$y(x) = C_0 \mathrm{e}^{A(x)} + c(x)\mathrm{e}^{A(x)} = C_0 \mathrm{e}^{-x^2} + \tfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(c) Die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen lässt sich schreiben als

$$y' = f(x)g(y)$$

mit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $f(x) = -x^2$ und $g \in C((0,\infty),\mathbb{R})$; $g(v) = v^{-3}$. (Beachte, dass $1 \in (0,\infty)$. Es ist also nicht sinnvoll $(-\infty,0)$ als Definitionsbereich von g zu wählen.) Da $g(v) \neq 0$ für alle $v \in (0,\infty)$, existiert die maximale Lösung $y \in C^1(I_0,\mathbb{R})$ des Anfangswertproblems. Sie erfüllt

$$-\tfrac{1}{3}x^3 = -\int_0^x t^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{y(x)} \frac{1}{g(v)}\,\mathrm{d}v = \int_1^{y(x)} v^3\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{4}(y(x))^4 - \tfrac{1}{4}$$

für alle $x \in I_0$. Weiter haben wir $y(x) > 0$ für alle $x \in I_0$, denn y bildet in den Definitionsbereich $(0,\infty)$ von g ab. Hieraus schließen wir, dass

$$(y(x))^4 = 4(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}x^3) = 1 - \tfrac{4}{3}x^3 \quad\Longleftrightarrow\quad y(x) = \sqrt[4]{1 - \tfrac{4}{3}x^3}$$

für alle $x \in I_0$. Der Ausdruck auf der rechten Seite ist sinnvoll und definiert eine stetig differenzierbare Funktion, so lange $1 - \frac{4}{3}x^3 > 0$ bzw. $x < \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$. Es folgt, dass $I_0 = (-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{4}})$.

(d) Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$y' = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{y} + \frac{y^2}{y}\right) = f(x)g(y)$$

mit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $g \in C((0,\infty),\mathbb{R})$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $g(v) = \frac{1}{v} + v$. (Beachte, dass $4 \notin (-\infty,0)$.) Da $g(v) \neq 0$ für alle $v \in (0,\infty)$ existiert die maximale Lösung $y \in C^1(I_1,\mathbb{R})$ der Differentialgleichung. Sie erfüllt $y(x) \in (0,\infty)$ sowie

$$\arctan(x) - \tfrac{\pi}{4} = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_4^{y(x)} \frac{1}{\frac{1}{v}+v}\,\mathrm{d}v = \int_4^{y(x)} \frac{v}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}\log\bigl(1+(y(x))^2\bigr) - \tfrac{1}{2}\log(17)$$

für alle $x \in I_1$. Hieraus schließen wir, dass

$$1 + (y(x))^2 = \exp\bigl(2\arctan(x) - \tfrac{\pi}{2} + \log(17)\bigr) \quad\Longleftrightarrow\quad y(x) = \sqrt{\exp\bigl(2\arctan(x) - \tfrac{\pi}{2} + \log(17)\bigr) - 1}$$

für alle $x \in I_1$. Der Ausdruck auf der rechten Seite ist wohldefiniert und liefert eine stetig differenzierbare Funktion genau dann wenn

$$\begin{aligned}\exp\bigl(2\arctan(x) - \tfrac{\pi}{2} + \log(17)\bigr) > 1 \quad&\Longleftrightarrow\quad 2\arctan(x) - \tfrac{\pi}{2} + \log(17) > 0\\ &\Longleftrightarrow\quad \arctan(x) > \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\log(17) > 0.\end{aligned}$$

Da $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log(17) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ist die letzte Bedingung erfüllt, wenn $x > \tan\bigl(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(17)\bigr)$. Es folgt, dass $I_1 = (\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(17)), \infty)$.

Aufgabe 42 (K) Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme auf geeigneten Intervallen.

(a) $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$,
$y(0) = 1$,

(b) $y' = \mathrm{e}^{2x}\sqrt{1 + \dfrac{1}{y^2}}$,
$y(0) = 2$,

(c) $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$, $(x > 0)$,
$y(1) = 1$,

(d) $y' = \exp\bigl(x - y - \mathrm{e}^y\bigr)$,
$y(1) = 0$.

Lösung zu Aufgabe 42 (a) Nach elementaren Umformungen lässt sich die Differentialgleichung schreiben als

$$y' = a(x)y + s(x)$$

mit $a, s \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gegeben durch $a(x) = -\cos(x)$ und $s(x) = \sin(x)\cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Es handelt sich also um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Jede Lösung y ist von der Form

$$y(x) = C_0 \mathrm{e}^{A(x)} + c(x)\mathrm{e}^{A(x)}$$

für ein $C_0 \in \mathbb{R}$, wobei $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von a ist und $c \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von $s \cdot \exp(-A(\,.\,))$. Offenbar liefert $A(x) = -\sin(x)$ eine Stammfunktion von a. Weiter berechnen wir mit partieller Integration

$$\begin{aligned} c(x) &:= \int s(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,\mathrm{d}x = \int \underset{\downarrow}{\sin(x)}\underbrace{\cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}}_{\uparrow}\,\mathrm{d}x = \sin(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} - \int \cos(x)\mathrm{e}^{\sin(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \sin(x)\mathrm{e}^{\sin(x)} - \mathrm{e}^{\sin(x)} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ist also $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Lösung der Differentialgleichung, dann gibt es ein $C_0 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$y(x) = C_0\mathrm{e}^{-\sin(x)} + (\sin(x) - 1)\mathrm{e}^{\sin(x)}\mathrm{e}^{-\sin(x)} = C_0\mathrm{e}^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingung ist erfüllt, wenn

$$1 = y(0) = C_0\mathrm{e}^0 - 1 \iff 1 = C_0 - 1 \iff C_0 = 2.$$

(b) Wir definieren $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und $g \in C((0, \infty), \mathbb{R})$, $g(v) = \sqrt{1 + v^{-2}}$. Dann lässt sich die Differentialgleichung schreiben als

$$y' = f(x)g(y).$$

Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. (Beachte, dass $2 \in (0, \infty)$. Deshalb haben wir nicht $(-\infty, 0)$ als Definitionsbereich von g gewählt.) Da $g(v) \neq 0$ für alle $v \in (0, \infty)$ existiert die maximale Lösung $y \in C^1(I_0, \mathbb{R})$ der Differentialgleichung. Sie erfüllt $y(x) \in (0, \infty)$ sowie

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x} - 1) &= \int_0^x \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_2^{y(x)} \frac{1}{g(v)}\,\mathrm{d}v = \int_2^{y(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + v^{-2}}}\,\mathrm{d}v = \int_2^{y(x)} \frac{v}{\sqrt{v^2 + 1}}\,\mathrm{d}v = \sqrt{(y(x))^2 + 1} - \sqrt{5} \end{aligned}$$

für alle $x \in I_0$. Es folgt, dass

$$(y(x))^2 = \left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \tfrac{1}{2} + \sqrt{5}\right)^2 - 1 \iff y(x) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \tfrac{1}{2} + \sqrt{5}\right)^2 - 1}$$

für alle $x \in I_0$. Der Ausdruck auf der rechten Seite ist für alle $x \in \mathbb{R}$ sinnvoll und definiert eine stetig differenzierbare Funktion, denn $\sqrt{5} > 2$ und somit gilt $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2} + \sqrt{5} > 0 - \frac{1}{2} + 2 > 1$ bzw.

$$\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \tfrac{1}{2} + \sqrt{5}\right)^2 - 1 > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten $I_0 = \mathbb{R}$.

(c) Nach elementaren Umformungen lässt sich die Differentialgleichung schreiben als

$$y' = -\frac{2 - 3x^2}{x^3}y + 1 = a(x)y + s(x)$$

mit $a \in C((0, \infty), \mathbb{R})$, $a(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3}$ und $s \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $s(x) = 1$. Es handelt sich also um eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Um die allgemeine Lösung darzustellen benötigen wir wieder Stammfunktionen $A \in C^1((0, \infty), \mathbb{R})$ von a und $c \in C^1((0, \infty), \mathbb{R})$ der Funktion $s \cdot \mathrm{e}^{-A(\,\cdot\,)} \in C((0, \infty), \mathbb{R})$. Wir berechnen

$$A(x) := \int \frac{3x^2 - 2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \log(x^3) + x^{-2}$$

sowie

$$\begin{aligned} c(x) &:= \int 1 \cdot \exp\bigl(-\log(x^3) - x^{-2}\bigr)\,\mathrm{d}x = \int \exp\bigl(\log(x^{-3})\bigr)\exp\bigl(-\tfrac{1}{x^2}\bigr)\,\mathrm{d}x = \int \tfrac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\int \exp(u)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\exp(u) = \tfrac{1}{2}\exp\bigl(-\tfrac{1}{x^2}\bigr) \end{aligned}$$

für $x > 0$, wobei wir die Substitution $u = -x^{-2}$ (und damit „$\mathrm{d}u = 2x^{-3}\mathrm{d}x$") angewendet haben. Ist $y \in C^1((0,\infty),\mathbb{R})$ eine Lösung der Differentialgleichung, dann gibt es ein $C_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$y(x) = C_0\mathrm{e}^{\log(x^3)+x^{-2}} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\mathrm{e}^{\log(x^3)+x^{-2}} = C_0x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} + \tfrac{1}{2}x^3 = x^3\bigl(C_0\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} + \tfrac{1}{2}\bigr)$$

für alle $x \in (0,\infty)$. Die Anfangsbedingung ist erfüllt, wenn

$$1 = y(1) = C_0\mathrm{e} + \tfrac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad C_0 = \frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

(d) Die Differentialgleichung lässt sich schreiben als

$$y' = \exp(x)\exp(-y - \tfrac{1}{y}) = f(x)g(y)$$

mit $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ definiert durch $f(x) = \exp(x)$ und $g(v) = \exp(-v - \mathrm{e}^v)$. Es handelt sich also um eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen. Da $g(v) \neq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}$, existiert die maximale Lösung $y \in C^1(I_1,\mathbb{R})$. Diese erfüllt

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e} = \int_1^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_0^{y(x)} \frac{1}{\exp(-v-\mathrm{e}^v)}\,\mathrm{d}v = \int_0^{y(x)} \exp(v + \mathrm{e}^v)\,\mathrm{d}v = \int_0^{y(x)} \mathrm{e}^v\mathrm{e}^{\mathrm{e}^v}\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{y(x)}} - \mathrm{e}$$

für alle $x \in I_1$. Wir schließen, dass

$$\mathrm{e}^{y(x)} = \log(\mathrm{e}^x - \mathrm{e} + \mathrm{e}) \quad\Longleftrightarrow\quad y(x) = \log\bigl(\log(\mathrm{e}^x)\bigr) = \log(x).$$

für alle $x \in I_1$. Die rechte Seite ist wohldefiniert und liefert eine stetig differenzierbare Funktion wenn $x > 0$, sodass $I_1 = (0,\infty)$.

Aufgabe 43 (K) Es sei $f : [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und für jedes $x \in [a,b]$ sei $f(x,\,.\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ y \mapsto f(x,y)$ monoton fallend. Zeigen Sie: Sind $y_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = f(x,y), \quad y(a) = y_0,$$

dann gilt $y_1 = y_2$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g := \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2$.

Lösung zu Aufgabe 43 Seien $y_1, y_2 \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $y_j'(x) = f(x, y_j(x))$ für alle $x \in [a,b]$ und $y_j(a) = y_0$ für $j = 1,2$. Wir definieren $g := \frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2$. Offenbar gilt $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Weiter ist auch g differenzierbar mit

$$g'(x) = (y_1(x) - y_2(x))(y_1'(x) - y_2'(x)) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Sei nun $x \in [a,b]$ beliebig. Falls $y_1(x) \leq y_2(x)$, so folgt wegen der vorausgesetzten Monotonie $y_1'(x) = f(x,y_1(x)) \geq f(x,y_2(x)) = y_2'(x)$. Ist $y_1(x) > y_2(x)$, so folgt entsprechend $y_1'(x) = f(x,y_1(x)) \leq f(x,y_2(x)) = y_2'(x)$. Also gilt in beiden Fällen

$$g'(x) = (y_1(x) - y_2(x))(y_1'(x) - y_2'(x)) \leq 0.$$

Das zeigt, dass g monoton fallend ist. Wegen $g(a) = \frac{1}{2}(y_0 - y_0)^2 = 0$ haben wir $g(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Wir schließen, dass $g = 0$ und damit auch $y_1 = y_2$.

Aufgabe 44 Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $y : J \to \mathbb{R}$ eine Lösung der autonomen Differentialgleichung $y' = f(y)$.

(a) Sei $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $y \in C^{n+1}(J, \mathbb{R})$.

(b) Für ein $t_0 \in J$ gelte $y(t_0) > 0$ und f erfülle $f(0) > 0$. Zeigen Sie, dass $y(t) > 0$ für alle $t \in J$ mit $t \geq t_0$.

(c) Zeigen Sie, dass y monoton ist.

Lösung zu Aufgabe 44 (a) Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig, denn eine Lösung ist per Definition stetig differenzierbar.
Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Da $y \in C^n(J, \mathbb{R})$ eine Lösung ist, wird die Gleichung $y' = f(y)$ erfüllt. Nach der Kettenregel ist die Funktion $f(y)$ n-mal stetig differenzierbar. Damit ist auch y' n-mal stetig differenzierbar. Das heißt aber, dass y $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar ist.

(b) Wir nehmen an, die Behauptung wäre falsch, d.h. y wird irgendwann nichtpositiv. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $t_1 \in J$ mit $y(t_1) = 0$. Außerdem ist $y'(t_1) = f(y(t_1)) = f(0) > 0$. Andererseits erhalten wir durch Betrachtung des linksseitigen Differenzenquotienten

$$y'(t_1) = \lim_{h \to 0-} \frac{1}{h}(y(t_1 + h) - y(t_1)) = \lim_{h \to 0-} \frac{1}{h} y(t_1 + h) \leq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch und es folgt die Behauptung.

(c) Wir nehmen an, dass y nicht monoton wäre. Da y differenzierbar ist, gibt es $a, b \in J$ derart, dass $y'(a) > 0$ und $y'(b) < 0$ gilt.

Zunächst eine kleine Vorüberlegung. Wir wollen zeigen, dass wir o.B.d.A. die Situation $a < b$ und $y(a) \leq y(b)$ betrachten können. Auf diesen Fall wollen wir zunächst die folgenden drei Fälle zurückführen.

1. $a > b$ und $y(a) \geq y(b)$: In diesem Fall setzen wir $\tilde{y}(t) = -y(-t)$, für $t \in -J$, $\tilde{f}(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\tilde{a} = -a$ sowie $\tilde{b} = -b$. Dann erfüllt $\tilde{y}$ die autonome Differentialgleichung $\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(\tilde{y}(t))$, $t \in -J$. Außerdem gilt $\tilde{a} < \tilde{b}$, $\tilde{y}(\tilde{a}) = -y(a) \leq -y(b) = \tilde{y}(\tilde{b})$ und $\tilde{y}'(\tilde{a}) = y'(a) > 0$ sowie $\tilde{y}'(\tilde{b}) = y(b) < 0$.
2. $a > b$ und $y(a) \leq y(b)$: In diesem Fall setzen wir $\tilde{y}(t) = -y(t)$, für $t \in J$, $\tilde{f}(x) = -f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\tilde{a} = b$ sowie $\tilde{b} = a$. Dann erfüllt $\tilde{y}$ die autonome Differentialgleichung $\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(\tilde{y}(t))$, $t \in J$. Außerdem gilt $\tilde{a} < \tilde{b}$, $\tilde{y}(\tilde{a}) = -y(b) \leq -y(a) = \tilde{y}(\tilde{b})$ und $\tilde{y}'(\tilde{a}) = -y'(b) > 0$ sowie $\tilde{y}'(\tilde{b}) = -y(a) < 0$.
3. $a < b$ und $y(a) \geq y(b)$: In diesem Fall setzen wir $\tilde{y}(t) = y(-t)$, für $t \in -J$, $\tilde{f}(x) = -f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $\tilde{a} = -b$ sowie $\tilde{b} = -a$. Dann erfüllt $\tilde{y}$ die autonome Differentialgleichung $\tilde{y}'(t) = \tilde{f}(\tilde{y}(t))$, $t \in -J$. Außerdem gilt $\tilde{a} < \tilde{b}$, $\tilde{y}(\tilde{a}) = y(b) \leq y(a) = \tilde{y}(\tilde{b})$ und $\tilde{y}'(\tilde{a}) = -y'(b) > 0$ sowie $\tilde{y}'(\tilde{b}) = -y(a) < 0$.

Nun zum eigentlichen Beweis. Wähle $\tau \in (a, b)$ so, dass $y(\tau) = \max_{t \in [a,b]} y(t)$. Definiere ferner $\sigma = \max\{s \in (a, \tau] \mid y(s) = y(b)\}$. ($\sigma$ kann so definiert werden, weil wir vorausgesetzt haben, dass $y(a) \leq y(b)$ und nach dem Zwischenwertsatz ist die Menge $y((a, b))$ ein Intervall. Die Stetigkeit von y stellt sicher, dass das Maximum angenommen wird.) Also haben wir $y(\sigma) = y(b)$ sowie $y(s) > y(\sigma)$ für alle $s \in (\sigma, \tau)$. Durch Bildung des rechtsseitigen Differenzenquotienten folgt daraus $y'(\sigma) \geq 0$. Insgesamt gilt dann $0 \leq y'(\sigma) = f(y(\sigma)) = f(y(b)) = y'(b) < 0$, ein Widerspruch. Also war unsere Annahme falsch und y ist monoton.