KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 27.07.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 12. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 45 Finden Sie eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ so, dass ...

(a) ... für je zwei Lösungen $y_1, y_2 : J \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auch $y_1 + y_2$ eine Lösung ist.

(b) ... $y(x) = \sinh(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$ liefert.

(c) ... ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$ für mindestens ein $(0, y_0) \in D$ eine eindeutige Lösung mit maximalem Existenzintervall $(-1, 1)$ hat.

(d) ... ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$ für mindestens ein $(0, y_0) \in D$ keine Lösung besitzt.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 45 (a) Jede homogene linear Differentialgleichung liefert ein solches Beispiel. Sei konkret $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in C(I, \mathbb{R})$. Setze $D = I \times \mathbb{R}$ und definiere $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, v) = a(x)v$. Für je zwei Lösungen $y_1, y_2 \in C^1(J, \mathbb{R})$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ gilt $y_1 + y_2 \in C^1(J, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned}(y_1 + y_2)'(x) &= y_1'(x) + y_2'(x) = a(x)y_1(x) + a(x)y_2(x) \\ &= a(x)(y_1(x) + y_2(x)) = f(x, (y_1 + y_2)(x)) \quad \text{für alle } x \in J.\end{aligned}$$

Das zeigt, dass $y_1 + y_2$ eine Lösung ist.
Ein Spezialfall wäre $f(x, v) = 0$ für $(x, v) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Setzte $D = \mathbb{R}^2$ und $f(x, v) = \cosh(x)$ für $(x, v) \in D$. Es ist bekannt, dass die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = \cosh(x) = f(x, y)$, $y(0) = 0$ ist.

(c) Setze $D = (-1, 1) \times \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$; $f(x, v) = xv^2$. Die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen $y' = xy^2$ mit Anfangswert $y(0) = 2$ hat die Lösung $y(x) = 2(1 - x^2)^{-1}$ für $x \in (-1, 1)$. Da $|y(x)| \to \infty$ für $t \to \pm 1$ folgt, dass die Lösung auf kein echt größeres Intervall fortgesetzt werden kann.

(d) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, v) = g(v)$, wobei

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad g(v) = \begin{cases} 1, & v = 0 \\ 0, & v \neq 0 \end{cases}$$

Wir behaupten, dass das Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$ keine Lösung hat.
Angenommen es hätte eine Lösung $y \in J \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in J$. Insbesondere sei die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ erfüllt. Zu $x \in J \setminus \{0\}$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen 0 und x mit

$$y(x) = y(x) - y(0) = y'(\xi)x = g(y(x))x$$

Wenn nun $y(x) = 0$, dann folgt $0 = y(x) = g(y(x))x = x$, ein Widerspruch. Falls $y(x) \neq 0$, haben wir $y(x) = g(y(x))x = 0$. Auch das ist Widersprüchlich. Es kann somit keine Lösung des genannten Anfangswertproblems geben.

Aufgabe 46 (K) (a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Ferner sei $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$ und es gelte $\|y(x) - y_\infty\| \to 0$ für $x \to \infty$ für eine $y_\infty \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f(y_\infty) = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= -xy_1 + 2x(x-1)y_2, \qquad & u(0) &= 0, \\ y_2' &= y_2^2 & v(0) &= 1, \end{aligned}$$

eine eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung $y = (y_1, y_2) \in C^1(J, \mathbb{R}^2)$ besitzt und bestimmen Sie diese.

Lösung zu Aufgabe 46 (a) Wir argumentieren für die Komponentenfunktionen y_j und f_j von y bzw. f, wobei $j \in \{1, \ldots, n\}$.
Sei also $j \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Wir betrachten die Folge (x_k) mit den Gliedern $x_k = k$ für $k \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt $x_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Der Mittelwertsatz liefert für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $\xi_k \in (x_k, x_{k+1}) = (k, k+1)$ mit der Eigenschaft $y_j(x_{k+1}) - y_j(x_k) = y_j'(\xi_k)(k+1-k) = y_j'(\xi_k)$. Beachte, dass auch $\xi_k \to \infty$ für $k \to \infty$.
Nach Voraussetzung gilt

$$\|y(x_{k+1}) - y(x_k)\| \leq \|y(x_{k+1}) - y_\infty\| + \|y(x_k) - y_\infty\| \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wir schließen, dass $y_j(x_{k+1}) - y_j(x_k) \to 0$ in $\mathbb{R}^n$ für $k \to \infty$. Da y die Differentialgleichung erfüllt und f_j stetig ist, gilt andererseits

$$y_j(x_{k+1}) - y_j(x_k) = y_j'(\xi_k) = f_j(y(\xi_k)) \to f_j(y_\infty) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts haben wir $f_j(y_\infty) = 0$. Weil j beliebig war, folgt $f(y_\infty) = 0$.

(b) Wir definieren $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x, v, w) = (-xv + 2x(x-1)w, w^2)$. Dann lässt sich das Anfangswertproblem schreiben als

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = f(y_1, y_2), \qquad y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Komposition stetig partiell differenzierbarer Funktionen ist $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Also genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung bezüglich (v, w). Der Satz von Picard-Lindelöf (Version III) liefert die Existenz einer eindeutigen, nicht fortsetzbaren Lösung $y \in C^1(J, \mathbb{R}^2)$.
Um die Lösung zu berechnen, nutzen wir die spezielle Struktur der Differentialgleichung aus. Die zweite Gleichung ist unabhängig von y_1. Daher können wir zuerst das Anfangswertproblem

$$y_2' = y_2^2, \quad y_2(0) = 1$$

lösen. Durch Trennung der Variablen erhalten wir

$$x = \int_0^x 1 \,\mathrm{d}t = \int_1^{y_2(x)} \frac{1}{v^2} \,\mathrm{d}v = 1 - (y_2(x))^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y_2(x)} = 1 - x \quad \Longrightarrow \quad y_2(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Die rechte Seite liefert eine stetig differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Wir müssen das Intervall $(-\infty, 1)$ als Definitionsbereich für y_2 wählen, da dieses den Punkt $x_0 = 0$ enthält. Die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung ist

$$y_2 : (-\infty, 1) \to (0, \infty); \quad y_2(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Diese Funktion können wir in das Anfangswertproblem

$$y_1' = -xy_1 + 2x(x-1)y_2(x), \qquad y_1(0) = 0$$

für y_1 einsetzen. Wir erhalten

$$y_1' = -xy_1 - 2x, \qquad y_1(0) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung ist

$$y_1 : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}, \quad y_1(x) = C_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} + \left(\int (-2x) \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = C_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} - 2.$$

Die Konstante C_0 bestimmen wir mit Hilfe von

$$0 = y_1(0) = C_0 \mathrm{e}^0 - 2 \quad \Longrightarrow \quad C_0 = 2.$$

Insgesamt ist die eindeutige, nicht fortsetzbare Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems

$$y : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}^2; \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} - 2 \\ \frac{1}{1-x} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 47 (K) Sei

$$f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x,v) = \begin{cases} \sin^2(xv)\cos\left(\frac{x}{v}\right), & (x,v) \in [0,1] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \\ 0, & (x,v) \in [0,1] \times \{0\} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y), \quad y(0) = y_0$$

für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $y \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ besitzt.

Lösung zu Aufgabe 47 Nach dem Satz von Picard-Lindelöf (Version I) reicht es zu zeigen, dass f stetig ist und bezüglich v eine (globale) Lipschitz-Bedingung erfüllt. Hierfür reicht es wiederum zu zeigen, dass f stetig ist, partiell nach v differenzierbar und, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial v} f$ beschränkt ist.

Zunächst ist klar, dass f stetig ist auf $[0,1] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist. Sei nun $x \in [0,1]$ und (x_k, v_k) eine Folge in $[0,1] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ mit $(x_k, v_k) \to (x, 0)$ für $k \to \infty$. Da $|\cos(\frac{x_k}{v_k})| \leq 1$, gilt

$$|f(x_k, v_k) - 0| \leq |\sin(\underbrace{x_k v_k}_{\to 0})| \to |\sin(0)| = 0,$$

also $f(x_k, v_k) \to 0 = f(x, 0)$ für $k \to \infty$. Das zeigt, dass f auch in $(x, 0)$ stetig ist.
Ebenso ist klar, dass f auf $[0,1] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ partiell nach v differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial}{\partial v} f(x,v) = 2\sin(xv)\cos(xv)x\cos\left(\tfrac{x}{v}\right) + \sin^2(xv)\sin\left(\tfrac{x}{v}\right)\tfrac{x}{v^2}.$$

für alle $(x,v) \in [0,1] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Es ist bekannt, dass $|\sin(w)| \leq |w|$ für alle $w \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\left| \frac{\partial}{\partial v} f(x,v) \right| \leq 2 + |xv|^2 \frac{|x|}{v^2} = 2 + |x|^3 \leq 3$$

für alle $(x,v) \in [0,1] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Schließlich zeigen wir noch, dass f auch auf $[0,1] \times \{0\}$ partiell nach v differenzierbar ist. Sei dazu $x \in [0,1]$. Für $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x,v) - f(x,0)}{v} \right| &= \left| \tfrac{1}{v} \sin^2(xv)\cos\left(\tfrac{x}{v}\right) \right| \leq \frac{|\sin(xv)|}{|v|} |\sin(xv)| \leq \frac{|xv|}{|v|} |\sin(xv)| \\ &= |x\sin(xv)| \to |x\sin(0)| = 0 \quad \text{für } v \to 0. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\frac{\partial}{\partial v} f(x,0) = 0$. Damit ist gezeigt, dass f partiell nach v differenzierbar ist und $\frac{\partial}{\partial v} f$ beschränkt ist. Wie oben argumentiert, folgt die Behauptung.

Aufgabe 48 Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, s \in C(I, \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ und $x_0 \in I$ sowie $y_0 > 0$. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Differentialgleichungen dieser Form heißen *Bernoullische Differentialgleichung*. Der Ansatz $y(x) = (u(x))^\lambda$ mit $\lambda = \frac{1}{1-\alpha}$ und einem $u \in C^1(I_0, \mathbb{R})$ wobei $I_0 \subseteq I$ führt nach einer formalen Rechnung zu der Gleichung

$$u'(x) = (1-\alpha)a(x)u(x) + (1-\alpha)s(x), \quad u(x_0) = y_0^{1-\alpha}. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie: Ist $u \in C^1(I_0, \mathbb{R})$ eine Lösung von (2) und $u(x) > 0$ für alle $x \in I_0$, dann wird durch $y(x) = (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$ für $x \in I_0$ eine Lösung von (1) gegeben.

(b) Seien nun konkret $a, s \in C((0,\infty), \mathbb{R})$; $a(x) = \frac{1}{x}$, $s(x) = x$ und $\alpha = -1$, $x_0 = y_0 = 1$. Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (1) auf dem Intervall $(\mathrm{e}^{-1/2}, \infty)$.

Lösung zu Aufgabe 48 (a) Sei $u \in C^1(I_0, \mathbb{R})$ eine Lösung von (2) definiert auf einen Intervall $I_0 \subseteq I$ mit $u(x) > 0$ für alle $x \in I_0$. Dann wird durch

$$y(x) := (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}} = \exp\left(\frac{1}{1-\alpha}\log(u(x))\right) \quad \text{für } x \in I_0$$

eine Funktion $y \in C^1(I_0, \mathbb{R})$ definiert. Nach der Kettenregel gilt

$$y'(x) = \frac{1}{1-\alpha}\big(u(x)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}-1}u'(x) \quad \text{für alle } x \in I_0.$$

Weil u die Differentialgleichung in (2) erfüllt, erhalten wir

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha}a(x)\big(u(x)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}-1+1} + s(x)\big(u(x)\big)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &= a(x)y(x) + s(x)\Big(\big(u(x)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big)^{\alpha} = a(x)y(x) + s(x)(y(x))^{\alpha} \end{aligned}$$

für alle $x \in I_0$. Hierbei haben wir verwendet, dass $\frac{1}{1-\alpha} - 1 = \frac{1-(1-\alpha)}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Das zeigt, dass y eine Lösung der Differentialgleichung in (1) ist. Offenbar gilt $y(x_0) = \big(u(x_0)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \big(y_0^{1-\alpha}\big)^{\frac{1}{1-\alpha}} = y_0$.

(b) Es ist $1 - \alpha = 2$ also $\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{2}$. Einsetzen der Parameter in (2) liefert das Anfangswertproblem

$$u' = 2\frac{u}{x} + 2x, \quad u(1) = 1^2 = 1.$$

Die allgemeine Lösung $u \in C^1((0,\infty), \mathbb{R})$ dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$u(x) = C_0\mathrm{e}^{2\log(x)} + \left(\int 2x\mathrm{e}^{-2\log(x)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\log(x^2)} = C_0x^2 + 2\log(x)x^2$$

für eine $C_0 \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung $C_0 + 0 = u(1) = 1$ ist erfüllt, wenn $C_0 = 1$. Es folgt

$$u(x) = x^2(1 + \log(x^2)) \quad \text{für } x \in (0, \infty).$$

Offenbar ist $u(x) > 0$ genau dann, wenn

$$\log(x^2) > -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 > \mathrm{e}^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad x > \mathrm{e}^{-1/2}.$$

Wir definieren $y \in C^1((\mathrm{e}^{-1/2}, \infty), \mathbb{R})$ durch $y(x) = u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} = x\sqrt{\log(x^2) + 1}$ für $x \in (\mathrm{e}^{-1/2}, \infty)$. Mit der Rechnung aus (a) schließen wir, dass y eine Lösung von (1) ist.