KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 27.07.2017
Fakultät für Mathematik
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Lars Machinek

Lösungsvorschlag zum 13. Übungsblatt

Analysis II im SS17

Aufgabe 49 (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ und die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = (7, 8, 9)^\top$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$; $b(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay + b(x)$ und die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay + b(x)$, $y(0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^\top$.

Lösung zu Aufgabe 49 *. . . wurde in der Übung am 21.07.2017 vorgerechnet.*

Aufgabe 50 (K) (a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ und sei $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = Ay + b(x), \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Nehmen Sie an eine Fundamentalmatrix $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Differenrialgleichung $y' = Ay$ sei gegeben durch

$$Y(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x + e^{3x} & 0 & e^x - e^{3x} \\ 2xe^x & 2e^x & 2xe^x \\ e^x - e^{3x} & 0 & e^x + e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrix A.

Lösung zu Aufgabe 50 Wir konstruieren eine reelle Fundamentalmatrix des homogenen Differentialgleichung $y' = Ay$. Dazu berechnen wir zuerst die Eigenwerte der Matrix A. Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

Die Eigenwerte der Matrix sind also $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$. Um zugehörige Eigenvektoren zu erhalten bestimmen wir $\mathrm{Kern}(A - \lambda_1 I)$ und $\mathrm{Kern}(A - \lambda_2 I)$. Wir erhalten

$$E_{-2} = [\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}] \qquad \text{und} \qquad E_3 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Hiermit können wir zwei Fundamentallösungen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ angeben:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2x} \\ -3e^{-2x} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$$

Eine reelle Fundamentalmatrix $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ der homogenen Gleichung ist also definiert durch

$$Y(x) = \left(e^{-2x} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, e^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2e^{-2x} & e^{3x} \\ -3e^{-2x} & e^{3x} \end{pmatrix}.$$

Jetzt benötigen wir eine spezielle Lösung $y_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der inhomogenen Gleichung. Wir kennen zwei Möglichkeiten solch eine zu bestimmen. Es gibt die Formel

$$y_s(x) = Y(x) \int (Y(x))^{-1} b(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$\det Y(x) = 5\mathrm{e}^x \quad \text{und damit} \quad (Y(x))^{-1} = \frac{1}{5\mathrm{e}^x}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} & -\mathrm{e}^{3x} \\ 3\mathrm{e}^{-2x} & 2\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{2x} \\ 3\mathrm{e}^{-3x} & 2\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Nun haben wir

$$\begin{aligned} y_s(x) &= Y(x) \int Y(x)^{-1} b(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} Y(x) \int \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{2x} \\ 3\mathrm{e}^{-3x} & 2\mathrm{e}^{-3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5} Y(x) \int \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{x} \\ 2\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \frac{1}{5} Y(x) \begin{pmatrix} -\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ 2\int \mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{3x} \\ -3\mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}\mathrm{e}^x \\ -\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \\ \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Alternativ können wir die Formel

$$y_s(x) = \left(\int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x \right) y_1(x) + \left(\int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x \right) y_2(x)$$

verwenden, wobei

$$W(x) = \det Y(x) = 5\mathrm{e}^x, \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{-x} & \mathrm{e}^{3x} \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{2x} \quad \text{und} \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} 2\mathrm{e}^{-2x} & 0 \\ -3\mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = 2\mathrm{e}^{-3x}.$$

Sie führt allerdings auf die selbe Rechnung.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay + b(x)$ ist

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_s(x) = c_1 \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-2x} \\ -3\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \\ \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \end{pmatrix}.$$

Offenbar erfüllt y genau dann die Anfangsbedingung, wenn

$$y(0) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $c_1 = \frac{1}{5}$ und $c_2 = \frac{11}{10}$, d.h.

$$y(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{11}{10}\mathrm{e}^{3x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2} \\ -\frac{3}{5}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{11}{10}\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

(b) Wenn Y eine Fundamentalmatrix ist, dann gilt $Y'(x) = AY(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beachte, dass

$$Y(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir oben also $x = 0$, dann haben wir $Y'(0) = A$. (Im Allgemeinen müssen wir $Y(x_0)$ invertieren und von rechts multiplizieren: $Y'(x_0)Y(x_0)^{-1} = AY(x_0)Y(x_0)^{-1} = A$.) Wir berechnen

$$Y'(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{3x} & 0 & \mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{3x} \\ 2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^x & 2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{3x} & 0 & \mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = Y'(0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 51 (K) Bestimmen Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y' = Ax$ und die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = y_0$.

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 51 (a) Wir beginnen damit ein reelles Fundamentalsystem zu $y' = Ay$ zu bestimmen. Dazu benötigen wir zuerst die Eigenwerte der Matrix A. Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = -(\lambda + 1)^2(\lambda + 2).$$

Daher ist $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$. Mit dem üblichen Algorithmus zur Bestimmung von Eigenräumen ergibt sich $E_{-2} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$. Nun benötigen wir noch eine Basis von $V := \text{Kern}((A + I)^2)$. Es gilt

$$\text{Kern}(A + I) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

Um den zweiten Basisvektor von V zu bekommen, lösen wir das Gleichungssystem

$$(A + I)v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Laut Vorlesung ist dann eine reelle Fundamentalmatrix von $y' = Ay$ gegeben durch

$$Y(x) = \left(\mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-x} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

(ii) Diesmal bestimmen wir die Lösung des Anfangswertproblems mit Hilfe von Aufgabe 52. Demnach ist sie gegeben durch

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; \quad y(x) = Y(x)Y(0)^{-1}y_0.$$

Die inverse Matrix $Y(0)$ berechnet man mit dem Gaußalgorithmus und erhält

$$Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y(x) = Y(x)Y(0)^{-1}y_0 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} & \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} & 0 & \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} - x\mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Wir gehen vor wie in Teil (a) und beginnen mit der Berechnung der Eigenwerte von A. Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5).$$

Die Eigenwerte lauten also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = 1 - 2\mathrm{i}$. Der reelle Eigenwert $\lambda_1 = 1$ hat den Eigenraum

$$E_1 = \text{Kern}(A - I) = [\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}].$$

Daraus erhalten wir die Fundamentallösung

$$y_1(x) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der komplexe Eigenwert $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ hat den Eigenraum

$$E_{1+2\mathrm{i}} = \mathrm{Kern}(A - (1+2\mathrm{i})I) = [\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Dann gilt

$$\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^x(\cos(2x) + i\sin(2x)) \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + i\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Den Eigenwert mit negativem Imaginär ingorieren wir. Wir erhalten das Fundamentalsystem

$$Y(x) = \left(\mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}, \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2x) \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -\sin(2x) & \cos(2x) \\ 2 & \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix}.$$

(ii) Wieder berechnen wir die Lösung des Anfangswertproblems mit Aufgabe 52. Es gilt

$$Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\mathrm{e}^x}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -\sin(2x) & \cos(2x) \\ 2 & \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -\sin(2x) & \cos(2x) \\ 2 & \cos(2x) & \sin(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 52 Seien $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $Y : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $y' = A(x)y$. Weiter seien $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$ sowie $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Lösung $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben ist durch

$$y(x) = Y(x)Y(x_0)^{-1}y_0 + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,\mathrm{d}t.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $Y'(x) = A(x)Y(x)$ und dann, dass

$$y_s : I \to \mathbb{R}^n; \quad y_s(x) = Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)\,\mathrm{d}t$$

eine spezielle Lösung von $y' = A(x)y + b(x)$ ist.

Lösung zu Aufgabe 52 In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist. Sei y wie in der Aufgabenstellung definiert. Wir brauchen nur zu zeigen, dass die angegebene Funktion tatsächlich das Anfangswertproblem löst. Zunächst gilt

$$y(x_0) = Y(x_0)Y(x_0)^{-1}y_0 + Y(x_0) \int_{x_0}^{x_0} Y(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s = y_0.$$

Somit erfüllt y die Anfangsbedingung.

Die Fundamentalmatrix $Y(x)$ enthält als Spalten linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung $y_1(x), ..., y_n(x)$, d.h.

$$Y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x)) \quad \text{für } x \in I.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} Y'(x) &= (y_1'(x), \ldots, y_n'(x)) = (A(x)y_1(x), \ldots, A(x)y_n(x)) \\ &= A(x)(y_1(x), \ldots, y_n(x)) = AY(x) \quad \text{für } x \in I. \end{aligned} \tag{1}$$

Sei nun $Z : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine differenzierbare Abbildung und $H : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch $H(x) = Y(x)Z(x)$. Dann folgt mit der Produktregel

$$H'_{ij}(x) = \big(\sum_{k=1}^{n} Y_{ik}(\,.\,)Z_{kj}(\,.\,)\big)'(x) = \sum_{k=1}^{n} Y'_{ik}(x)Z_{kj}(x) + \sum_{k=1}^{n} Y_{ik}(x)Z'_{kj}(x)$$

und damit

$$H'(x) = Y'(x)Z(x) + Y(x)Z'(x).$$

Setzen wir $Z(x) := \int_{x_0}^{x} Y(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s$ erhalten wir mit (1)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Y(x)\int_{x_0}^{x} Y(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s &= Y'(x)\int_{x_0}^{x} Y(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s + Y(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x} Y(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s \\ &= A(x)Y(x)\int_{x_0}^{x} Y(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s + Y(x)Y(x)^{-1}b(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Insgesamt folgt also (1),(2)

$$y'(x) = A(x)\big(Y(x)Y^{-1}(0)y_0 + Y(x)\int_{x_0}^{x} Y(s)^{-1}b(s)\,\mathrm{d}s\big) + b(x) = A(x)y(x) + b(x).$$