14. Übungsblatt

zur Vorlesung Analysis II im SS17
Keine Abgabe

Aufgabe 53 Berechnen Sie die allgemeinen Lösungen folgenden Differentialgleichungen

(a) $y'''(x) - y'(x) = 3 + 2 + x^2$ (b) $y''(x) - 4y(x) = x\mathrm{e}^{2x}$

(c) $y'''(x) - 4y''(x) + 3y'(x) = 2\cos(x) + 4\sin(x)$.

(d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 3y'(x) = x\mathrm{e}^x + \sin(3x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Lösung zu Aufgabe 53 (a) Wir betrachten zuerst die homogene Gleichung $y'''(x) - y'(x) = 0$. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Sie liefern die linear unabhängigen Lösungen $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^x, \qquad y_3(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad y_0(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{-x}$$

für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Für eine spezielle Lösung der inhomogene Gleichung verwenden wir den Ansatz aus der Vorlesung (mit $m = 2$, $\alpha = \beta = 0$; 0 ist eine einfache Nullstelle von p). Wir setzen $y_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$y_s(x) = x\Big[(A_0 + A_1x + A_2x^2)\underbrace{\cos(0 \cdot x)}_{=1} + (B_0 + B_1x + B_2x^2)\underbrace{\sin(0 \cdot x)}_{=0}\Big] = A_0x + A_1x^2 + A_2x^3$$

Es folgt, dass die erste und dritte Ableitung von y_s gegeben sind durch

$$y_s'(x) = A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad y_s'''(x) = 6A_2.$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir sehen, dass y_s eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, wenn

$$6A_2 - A_0 - 2A_1x - 3A_2x^2 = 3 + 2x + x^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$6A_2 - A_0 = 3, \qquad -2A_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad -3A_2 = 1.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $A_0 = -5$, $A_1 = -1$, $A_2 = -\frac{1}{3}$. Folglich ist die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$y(x) = y_0(x) + y_s(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{-x} - 5x - x^2 - \tfrac{1}{3}x^3$$

für Zahlen $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Wir betrachten zuerst die homogene Gleichung $y''(x) - 4y(x) = 0$. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Sie liefern die linear unabhängigen Lösungen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{2x} \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad y_0(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-2x}$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Für eine spezielle Lösung der inhomogene Gleichung verwenden wir den Ansatz aus der Vorlesung (mit $m = 1$, $\alpha = 2$ $\beta = 0$; 2 ist eine einfache Nullstelle von p). Wir setzen $y_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$y_s(x) = x(A_0 + A_1x)\mathrm{e}^{2x} = (A_0x + A_1x^2)\mathrm{e}^{2x}.$$

Die zweite Ableitung von y_s ist gegeben durch

$$y_s''(x) = (2A_1 + 4A_0 + (8A_1 + 4A_0)x + 4A_1x^2)\mathrm{e}^{2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir sehen, dass y_s eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, wenn

$$\begin{aligned}&(2A_1 + 4A_0 + (8A_1 + 4A_0)x + 4A_1x^2 - 4A_0x - 4A_1x^2)\mathrm{e}^{2x}\\ &\qquad = (2A_1 + 4A_0 + 8A_1x)\mathrm{e}^{2x} = x\mathrm{e}^{2x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$2A_1 + 4A_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad 8A_1 = 1.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $A_0 = -\frac{1}{16}$, $A_1 = \frac{1}{8}$. Folglich ist die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$y(x) = y_0(x) + y_s(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{-2x} + (-\tfrac{1}{16}x - x^2 + \tfrac{1}{8}x^2)\mathrm{e}^{2x}$$

für Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Wir betrachten zuerst die homogene Gleichung $y'''(x) - 4y''(x) + 3y' = 0$. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3).$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 3$. Sie liefern die linear unabhängigen Lösungen $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^x, \qquad y_3(x) = \mathrm{e}^{3x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad y_0(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{3x}$$

für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Die Voraussetzungen für die Regel über die Form einer speziellen Lösung aus der Vorlesung sind nicht direkt erfüllt. Der Ansatz liefert trotzdem eine solche. In der Tat ließe sich die Regel auf beide Summanden $2\cos(x)$ und $4\sin(x)$ einzeln anwenden. Weil die Differentialgleichung linear ist, ist die Summe der einzelnen Lösungen eine Lösung der ursprünglichen inhomogenen Gleichung. Tatsächlich würden wir dann nahezu die gleiche Rechnung zweimal ausführen.
Wir verwenden also den Ansatz aus der Vorlesung (mit $m = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$; i ist keine Nullstelle von p). Wir setzen $y_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$y_s(x) = A_0\cos(x) + B_0\sin(x)$$

Es folgt, dass die ersten drei Ableitungen von y_s gegeben sind durch

$$y_s'(x) = -A_0\sin(x) + B_0\cos(x), \qquad y_s''(x) = -A_0\cos(x) - B_0\sin(x),$$
$$y_s'''(x) = \quad A_0\sin(x) - B_0\cos(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir sehen, dass y_s eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, wenn

$$(-B_0 + 4A_0 + 3B_0)\cos(x) + (A_0 + 4B_0 - 3A_0)\sin(x) = 2\cos(x) + 4\sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das ist genau dann erfüllt, wenn

$$4A_0 + 2B_0 = 2, \qquad \text{und} \qquad -2A_0 + 4B_0 = 4.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $A_0 = 0$, $B_0 = 1$. Folglich ist die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$y(x) = y_0(x) + y_s(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{3x} + \sin(x).$$

für Zahlen $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(d) Wir betrachten zuerst die homogene Gleichung $y''(x) - 3y'(x) = 0$. Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3).$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$. Sie liefern die linear unabhängigen Lösungen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y_1(x) = 1 \qquad y_2(x) = \mathrm{e}^{3x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad y_0(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{3x}$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Für eine spezielle Lösung der inhomogene Gleichung verwenden wir zweimal den Ansatz aus der Vorlesung, einmal auf die rechte Seite $x\mathrm{e}^x$ und einmal auf die rechte Seite $\sin(3x)$. Weil die Differentialgleichung linear ist, ist die Summe der erhaltenen Lösungen eine spezielle Lösung des ursprünglichen Problems.
Für $m = 1$, $\alpha = 1$ $\beta = 0$ (1 ist keine Nullstelle von p) liefert die Regel den Ansatz $y_{s,1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$y_{s,1}(x) = (A_0 + A_1x)\mathrm{e}^x.$$

Die ersten zwei Ableitungen von $y_{s,1}$ sind gegeben durch

$$y_{s,1}'(x) = (A_0 + A_1 + A_1x)\mathrm{e}^x \qquad \text{bzw.}$$
$$y_{s,1}''(x) = (A_0 + 2A_1 + A_1x)\mathrm{e}^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir sehen, dass $y_{s,1}$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y'' - 3y' = x\mathrm{e}^x$ ist, wenn

$$(A_0 + 2A_1 + A_1x - 3A_0 - 3A_1 - 3A_1x)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$-2A_0 - A_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad -2A_1 = 1.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $A_0 = \frac{1}{4}$, $A_1 = -\frac{1}{2}$. Das bedeutet $y_{s,1}(x) = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x)\mathrm{e}^x$.
Für $m = 0$, $\alpha = 0$ $\beta = 3$ (3i ist keine Nullstelle von p) liefert die Regel den Ansatz $y_{s,2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$$y_{s,2}(x) = A_0\cos(3x) + B_0\sin(3x).$$

Die ersten beiden Ableitungen von $y_{s,2}$ sind gegeben durch

$$y_{s,2}'(x) = -3A_0\sin(3x) + 3B_0\cos(3x) \qquad \text{bzw.}$$
$$y_{s,2}''(x) = -9A_0\cos(3x) - 9B_0\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir sehen, dass $y_{s,2}$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y'' - 3y' = \sin(3x)$ ist, wenn

$$(-9A_0 - 9B_0)\cos(3x) + (9A_0 - 9B_0)\sin(3x) = \sin(3x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das ist genau dann erfüllt, wenn

$$-9A_0 - 9B_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad 9A_0 - 9B_0 = 1.$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $A_0 = \frac{1}{18}$, $B_0 = -\frac{1}{18}$. Das bedeutet $y_{s,2}(x) = \frac{1}{18}\cos(3x) - \frac{1}{18}\sin(3x)$.
Die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der inhomogenen Gleichung $y''(x) - 3y'(x) = x\mathrm{e}^x + \sin(3x)$ ist also gegeben durch

$$y(x) = y_0(x) + y_{s,1}(x) + y_{s,2}(x) = c_1 + c_2\mathrm{e}^{3x} + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}x)\mathrm{e}^x + \tfrac{1}{18}\cos(3x) - \tfrac{1}{18}\sin(3x)$$

für Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 54 Es sei $n, m \in \mathbb{N}$ und $A_0, \ldots, A_{n-1}$ Abbildungen vom Typ $I \to \mathbb{R}^{m\times m}$. Schreiben Sie die explizite homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0$$

für für eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}^m$ um in ein System von $n \cdot m$ Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Lösung zu Aufgabe 54 Sei $y : I \to \mathbb{R}^m$ eine Lösung der Differentialgleichung aus der Aufgabenstellung. Wir setzen $z : I \to \mathbb{R}^{n\cdot m}$;

$$z(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_m(x) & y_1'(x) & \ldots & y_m'(x) & \ldots & y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_m^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}^\top$$

Dann haben wir offenbar

$$z'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) & \ldots & y_m'(x) & y_1''(x) & \ldots & y_m''(x) & \ldots & y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_m^{(n)}(x) \end{pmatrix}^\top.$$

Also erfüllt z die Differentialgleichung $z'(x) = A(x)z(x)$ mit $A : I \to \mathbb{R}^{(n\cdot m)\times(n\cdot m)}$ gegeben in der Blockgestalt

$$A(x) = \begin{pmatrix} N_m & I_m & N_m & \ldots & N_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & N_m \\ N_m & \ldots & \ldots & N_m & I_m \\ -A_0(x) & -A_1(x) & \ldots & -A_{n-2}(x) & -A_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

wobei $N_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die Nullmatrix ist und $I_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ die Einheitsmatrix.
Um ein konkretes Beispiel anzugeben: Für $n = 2$ und $m = 3$ mit $A_0 = (a_0^{(i,j)})$ und

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -a & -b & -c \\ -4 & -5 & -6 & -d & -e & -f \\ -7 & -8 & -9 & -g & -h & -i \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Im Allgemeinen ist eine homogene lineare Differentialgleichung von der Form

$$A_n(x)y^{(n)}(x) + A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_1(x)y' + A_0(x)y = 0.$$

Wenn $A_n(x)$ für alle $x \in I$ invertierbar ist, dann lässt sich die Gleichung schreiben als

$$y^{(n)}(x) + (A_n(x))^{-1}A_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + (A_n(x))^{-1}A_1(x)y' + (A_n(x))^{-1}A_0(x)y = 0.$$

und ist damit in der Form wie in der Aufgabenstellung. Anderenfalls liegt eine implizite Gleichung vor.

Aufgabe 55 Die homogene lineare Differentialgleichung n-ter mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots a_1y'(x) + a_0y = 0 \tag{H}$$

lässt sich umschreiben als System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung $z'(x) = Az(x)$, wobei

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass λ die geometrische Vielfachheit 1 hat und bestimmen Sie einen Eigenvektor zu λ. Was ist die zugehörige Fundamentallösung von $z'(x) = Az(x)$ und welche Lösung von (H) können wir hieraus ableiten.

Lösung zu Aufgabe 55 Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Er zugehörige Eigenraum ist der Kern von

$$A - \lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(X) = \det(X - A) = a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n.$$

Es gilt also $p(\lambda) = 0$.

Für $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ gelte $(A - \lambda)v = 0$. Wir lesen ab, dass dann $-\lambda v_1 + v_2 = 0$ bzw. $v_2 = \lambda v_1$. Weiter sehen wir, dass $-\lambda v_2 + v_3 = 0$ bzw. $v_3 = \lambda v_2 = \lambda^2 v_1$. Induktiv erhalten wir

$$v_{j+1} = \lambda v_j = \lambda^j v_1 \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n-1.$$

Die letzte Zeile der Gleichung $(A - \lambda)v = 0$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= -a_0v_1 - a_1v_2 - \ldots - a_{n-2}v_{n-1} - a_{n-1}v_n - \lambda v_n \\ &= -\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_jv_{j+1}\right) - \lambda v_n = -\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j\lambda^j v_1\right) - \lambda\lambda^{n-1}v_1 = -p(\lambda)v_1. \end{aligned}$$

Diese Identität ist für alle $v_1 \in \mathbb{R}$ erfüllt. Somit ist $v = (v_1, \lambda v_1, \ldots, \lambda^{n-1}v_1) = (1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})v_1$. Es folgt, dass der Eigenraum zu λ aufgespannt wird von $v_\lambda := (1, \lambda, \ldots, \lambda^{n-1})$. Insbesondere ist er ein-dimensional, d.h. die geometrische Vielfachheit von λ ist 1.

Die zu v_λ gehörende Fundamentallösung ist

$$z_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad z_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda x} \\ \lambda\mathrm{e}^{\lambda x} \\ \vdots \\ \lambda^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die erste Koordinate von z_λ eine Lösung der Gleichung (H) liefert. Das ist gerade $y_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $y_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.